Integrales de series y conjuntos de medida cero

Objetivos. Demostrar un par de resultados sobre las integrales de series de funciones, no necesariamente positivas y definidas casi en todas partes.

Requisitos. Medida, propiedad subaditiva de la medida, integración, teorema de convergencia monótona, teorema de la integral de una serie de funciones positivas.

1. Integrales de funciones iguales casi en todas partes (repaso). Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$ o $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tales que $f \overset{\mu}{\sim} g$. Entonces

$$\int_X f\, d\mu = \int_X g\, d\mu.$$

2. Definición (función medible definida casi en todas partes). Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida. Sea $E \in \mathcal{F}$ y sea $f\colon E \to \overline{\mathbb{R}}_+$ o $f\colon E \to \mathbb{C}$. Se dice que f es $\mathcal{F}$-medible si $\mu(E^c) = 0$ y $f^{-1}[V] \in \mathcal{F}$ para todo conjunto abierto V. Notemos que en esta situación podemos extender f a X poniendo $f(x) = 0$ para todo $x \in X \setminus E$.

3. Sea $f \in L^1(X, \mathcal{F}, \overline{\mathbb{R}}_+)$. Entonces $f < +\infty$ c.t.p.

4. Teorema. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones complejas, donde para cada $n \in \mathbb{N}$ la función f_n está definida en casi todas partes de X y $\mathcal{F}$-medible. Supongamos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_X |f_n|\, d\mu < +\infty.$$

Entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge casi en todas partes, su suma g es una función μ-integrable, y

$$\int_X g\, d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_X f_n\, d\mu.$$

Idea de demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotemos por S_n al conjunto donde está definida f_n. Pongamos

$$S := \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Entonces $\mu(S_n^c) = 0$ y

$$\mu(S^c) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n^c\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(S_n^c) = 0.$$

Definamos $h\colon S \to \overline{\mathbb{R}}_+$ poniendo

$$h(x) \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} |f_n(x)|.$$

Entonces por el teorema de la integral de una serie de funciones positivas,

$$\int_S h\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_S |f_n|\,d\mu < +\infty.$$

Sea $B = \{x \in S\colon\ |h(x)| < +\infty\}$. Entonces $\mu(B^c) = 0$. Luego aplicamos el teorema de convergencia dominada a las sumas parciales en el conjunto B. □

5. Ejercicio. Considere las funciones $f_n\colon [0,1] \to \overline{\mathbb{R}}_+$, $f_n = \chi_{[0,1/2^n]}$. Determine en qué puntos de $[0,1]$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge.

6. Teorema (lema de Borel–Cantelli). Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión en $\mathcal{F}$ tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty.$$

Entonces

$$\mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{j=k}^{\infty} A_j\right) = 0,$$

esto es, casi todos $x \in X$ pertenecen sólo a un número finito de los A_n. En otras palabras, existe un $B \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(X \setminus B) = 0$ y para todo $x \in B$ existe un $p(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin A_n$ para todo $n \ge p(x)$.

Demostración. Sea B el conjunto de los $x \in X$ que pertenen a un número infinito de E_n:

$$E = \big\{x \in X\colon\ \{n \in \mathbb{N}\colon x \in A_n\} \text{ es infinito}\big\}.$$

Vamos a demostrar que $\mu(E) = 0$. Consideremos la función $g\colon X \to \overline{\mathbb{R}}_+$,

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}(x).$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ la expresión $\chi_{A_n}(x)$ es 0 o 1, por eso

$$x \in E \qquad \Longleftrightarrow \qquad g(x) = +\infty.$$

Ahora aplicamos el teorema de la integral de una serie de funciones positivas:

$$\int_X g\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \chi_{A_n}\,d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty. \qquad \square$$