# Continuidad de funciones definidas como integrales que dependen de un parámetro (un tema de análisis real)

Egor Maximenko, con modificaciones de Dante Arroyo Sánchez

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

26 de noviembre de 2024

**Objetivo:** estudiar funciones definidas como

$$\Phi(y) := \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x),$$

encontrar condiciones suficientes para que $\Phi$ sea continua.

**Prerrequisitos:**

- teorema de convergencia dominada,
- criterio de continuidad en términos de sucesiones.

**Prerrequisitos:**

- teorema de convergencia dominada,
- criterio de continuidad en términos de sucesiones.

**Aplicaciónes:**

- las funciones $\mathrm{B}$ y $\Gamma$ de Euler,
- la transformada de Fourier,
- otras funciones que se definen por medio de integrales.

# Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

Sean

- $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida,
- $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$, $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Supongamos que

- $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$,
- existe $h$ en $\mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f_n(x)| \leq h(x)$ para c.t.p. $x$ en $X$ y $\forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces las funciones $f_n$ y $g$ son integrables, y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu.$$

# Criterio de continuidad en términos de sucesiones (teorema de Heine)

Sean:

- $Y$ un espacio métrico,
- $Z$ un espacio topológico,
- $b \in Y$,
- $\varphi\colon Y \to Z$.

Entonces, son equivalentes:

(a) $\varphi$ es continua en el punto $b$;

(b) para cualquier sucesión $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$, si $\lim\limits_{k\to\infty} t_k = b$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} \varphi(t_k) = \varphi(b)$.

## Funciones de dos argumentos y fijación de un argumento

Sea $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$.

Para cada $x$ en $X$ fijo, definimos

$$f_x\colon Y \to \mathbb{C}, \qquad f_x(y) := f(x, y).$$

Para cada $y$ en $Y$ fijo, definimos

$$f^y\colon X \to \mathbb{C}, \qquad f^y(x) := f(x, y).$$

# Funciones definidas por integrales con parámetros

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $Y$ un espacio métrico, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$.
Suponemos que para cada $y$ en $Y$, $f^y \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, esto es,

$$f^y \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C}) \qquad \wedge \qquad \int_X |f(x,y)| \, \mathrm{d}\mu(x) < +\infty.$$

Entonces, para cada $y$ en $Y$ está bien definida la integral $\displaystyle\int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x)$.

El valor de esta integral depende de $y$. Definimos $\Phi\colon Y \to \mathbb{C}$ por

$$\boxed{\Phi(y) := \int_X f(x,y)\,\mathrm{d}\mu(x).}$$

# Teorema (continuidad de la función definida por una integral)

Sean $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, $Y$ un espacio métrico, $b \in Y$, $f\colon X \times Y \to \mathbb{C}$. Supongamos que

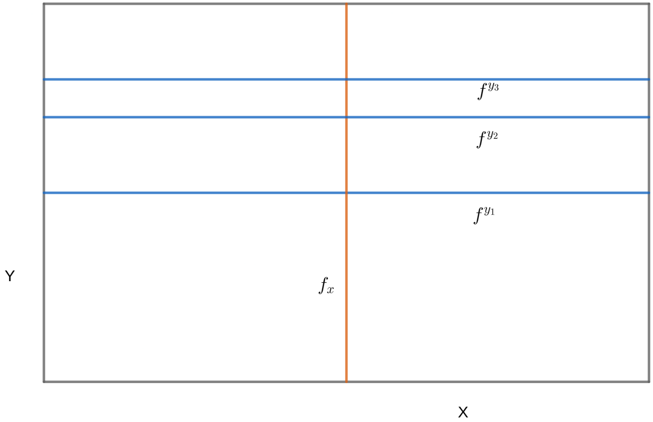
- $\forall y \in Y, \quad f^y \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$;
- para $\mu$-casi todo $x$ en $X$, la función $f_x$ es continua en el punto $b$;
- $\exists h \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f(x, y)| \le h(x)$ para todo $y$ en $Y$ y c.t.p. $x$ en $X$.

Entonces la función $\Phi\colon Y \to \mathbb{C}$, definida por

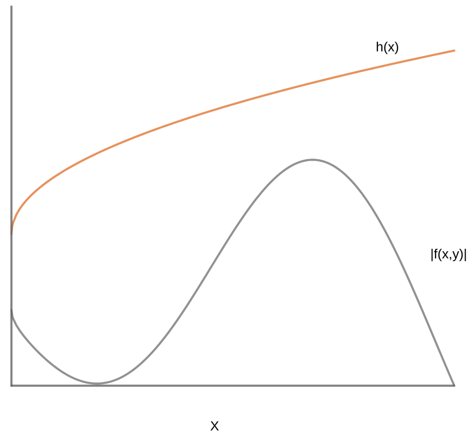
$$\Phi(y) := \int_X f(x, y)\, \mathrm{d}\mu(x),$$

es continua en el punto $b$.

# Ejemplo ilustrativo



# Ejemplo ilustrativo



**Inicio de demostración.**

Usemos el criterio de Heine.

**Inicio de demostración.**

Usemos el criterio de Heine.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$, $t_n \to b$. Demostremos que $\Phi(t_n) \to \Phi(b)$.

**Inicio de demostración.**

Usemos el criterio de Heine.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$, $t_n \to b$. Demostremos que $\Phi(t_n) \to \Phi(b)$.

Definimos $u_n\colon X \to \mathbb{C}$, $v\colon X \to \mathbb{C}$,

$$u_n(x) \coloneqq f(x, t_n), \qquad v(x) \coloneqq f(x, b).$$

**Inicio de demostración.**

Usemos el criterio de Heine.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$, $t_n \to b$. Demostremos que $\Phi(t_n) \to \Phi(b)$.

Definimos $u_n\colon X \to \mathbb{C}$, $v\colon X \to \mathbb{C}$,

$$u_n(x) := f(x, t_n), \qquad v(x) := f(x, b).$$

Recordemos una de las condiciones del teorema:

$$\mu\text{-c.t.p. } x \text{ en } X, \qquad f_x \text{ es continua en } b$$

**Inicio de demostración.**

Usemos el criterio de Heine.

Sea $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \in Y^{\mathbb{N}}$, $t_n \to b$. Demostremos que $\Phi(t_n) \to \Phi(b)$.

Definimos $u_n\colon X \to \mathbb{C}$, $v\colon X \to \mathbb{C}$,

$$u_n(x) := f(x, t_n), \qquad v(x) := f(x, b).$$

Recordemos una de las condiciones del teorema:

$$\mu\text{-c.t.p. } x \text{ en } X, \qquad f_x \text{ es continua en } b$$

Por el criterio de Heine,

$$u_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} v.$$

$\Rightarrow$

**Final de demostración.** Recordemos otra condición del teorema:

$$\forall y \in Y \qquad |f(x,y)| \leq h(x) \quad \text{c.t.p. } x.$$

Aplicamos esta condición con $t_n$ en vez de $y$:

$$|u_n| \leq h \quad \text{c.t.p.}$$

Por el teorema de la convergencia dominada,

$$\int_X v \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X u_n \,\mathrm{d}\mu,$$

esto es,

$$\Phi(b) = \lim_{n\to\infty} \Phi(t_n).$$

□

# Corolario

Sean $K$ un subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$,
$Y$ un espacio métrico compacto,
$f \in C(K \times Y, \mathbb{C})$.

Definimos $\Phi\colon\ Y \to \mathbb{C}$,

$$\Phi(y) := \int_X f(x, y)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Entonces $\Phi \in C(Y, \mathbb{C})$.

# Demostración

Como $K \times Y$ es espacio compacto y $f \in C(K \times Y, \mathbb{C})$, la función $f$ es acotada.

$$M := \sup_{(x,y) \in K \times Y} |f(x,y)|.$$

Tenemos que $f$ cumple las primeras dos hipótesis del teorema.

Tomando

$$h(x) := M 1_X,$$

$h$ domina a $f$ cumpliendo la tercera hipótesis del teorema.

# Tarea adicional pequeña: continuidad de la función definida como integral sobre compacto

**Ejercicio 1.** Sean $X$ un espacio métrico compacto, $Y$ un espacio métrico, $f \in C(X \times Y, \mathbb{C})$. Entonces

$$\forall b \in Y \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists V \in \tau_Y(b) \quad \forall x \in X \quad \forall y \in V \quad |f(x,y) - f(x,b)| < \varepsilon.$$

Aquí denotamos por $\tau_Y(b)$ al conjunto de las vecindades abiertas de $b$.

**Ejercicio 2.** Generalizar el corolario al caso cuando $Y$ es un espacio métrico arbitrario, no necesariamente compacto.

# Proposición: continuidad de la transformada de Fourier

Sea $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathbb{C})$. Definimos $\widehat{f} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$,

$$\widehat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi \mathrm{i}\, xu} f(x)\, \mathrm{d}x.$$

La función $\widehat{f}$ se llama la transformada de Fourier de $f$.
Entonces $\widehat{f}$ es continua en $\mathbb{R}$.

# Continuidad de $\widehat{f}$ usando el teorema

$$\phi(x,u) := \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xu}\, f(x), \qquad \widehat{f}(u) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-2\pi\,\mathrm{i}\,xu}\, f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Chequemos las condiciones del teorema.

- $\forall u \in \mathbb{R}, \quad \phi^u \in L^1(X,\mu,\mathbb{C})$.
- $\phi_x(u) = \underbrace{f(x)}_{\text{constante}} \exp\Big(\underbrace{-2\pi\,\mathrm{i}\,x}_{\text{constante}}\, u\Big)$, así que $\phi_x$ es continua.
- $h := |f|$, entonces

$$|\phi(x,u)| = |f(x)| = h(x).$$

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Primero escribamos un par de lemas que se utilizarán en la demostración.

- Lema 1. Sean $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $L > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}\setminus B(0,L)} |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Primero escribamos un par de lemas que se utilizarán en la demostración.

- Lema 1. Sean $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ y $\varepsilon > 0$. Entonces existe $L > 0$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}\setminus B(0,L)} |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon.$$

- Lema 2: Para todo $x \in \mathbb{R}$,

$$|e^{ix} - 1| \leq |x|.$$

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $h := \xi - \eta$.

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $h := \xi - \eta$.

Notemos que

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\, \mathrm{e}^{-2\pi i h x} - 1||f| \,\mathrm{d}\mu(x).$$

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $h := \xi - \eta$.

Notemos que

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\,\mathrm{e}^{-2\pi i h x} - 1||f|\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Para cualquier $L > 0$, podemos dividir la integral como:

$$\int_{B(0,L)} |\,\mathrm{e}^{-2\pi i h x} - 1||f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{\mathbb{R}\setminus B(0,L)} |\,\mathrm{e}^{-2\pi i h x} - 1|\,\mathrm{d}\mu(x).$$

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Sea $\varepsilon > 0$. Pongamos $h := \xi - \eta$.

Notemos que

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq \int_{\mathbb{R}} |\,\mathrm{e}^{-2\pi ihx} - 1||f|\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Para cualquier $L > 0$, podemos dividir la integral como:

$$\int_{B(0,L)} |\,\mathrm{e}^{-2\pi ihx} - 1||f(x)|\,\mathrm{d}\mu(x) + \int_{\mathbb{R}\setminus B(0,L)} |\,\mathrm{e}^{-2\pi ihx} - 1|\,\mathrm{d}\mu(x).$$

En la primera integral acotemos $|\,\mathrm{e}^{-2\pi ihx}\,|$ por 2.

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Elijamos $L > 0$ como en el lema 1, con $\frac{\varepsilon}{4}$ en vez de $\varepsilon$ y la segunda integral acotemosla por $|\,e^{-2\pi i h x}\,|$ usando el lema 2, así

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq 2|h|\pi L\|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Elijamos $L > 0$ como en el lema 1, con $\frac{\varepsilon}{4}$ en vez de $\varepsilon$ y la segunda integral acotemosla por $|\,\mathrm{e}^{-2\pi ihx}\,|$ usando el lema 2, así

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq 2|h|\pi L\|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2(2\pi L\|f\|_1 + 1)}.$$

# Demostración directa de la continuidad de $\widehat{f}$

Elijamos $L > 0$ como en el lema 1, con $\frac{\varepsilon}{4}$ en vez de $\varepsilon$ y la segunda integral acotemosla por $\left| e^{-2\pi i h x} \right|$ usando el lema 2, así

$$|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| \leq 2|h|\pi L\|f\|_1 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Pongamos

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2(2\pi L\|f\|_1 + 1)}.$$

Así, tenemos que si $|h| < \delta$, entonces $|\widehat{f}(\xi) - \widehat{f}(\eta)| < \varepsilon$.

# Ejercicio: continuidad del potencial creado por una carga de densidad dada

Sean $K$ un compacto de $\mathbb{R}^3$, $p \in L^\infty(K,\mathbb{R})$.
Definimos $U\colon \mathbb{R}^3 \setminus K \to \mathbb{R}$,

$$U(a) := \int_K \frac{p(x)\,\mathrm{d}x}{|x-a|}.$$

Demostrar que $U \in C(\mathbb{R}^3 \setminus K)$.

Sugerencia: primero demostrar que para todo $\delta > 0$ la función $U$ es continua en

$$S_\delta := \{a \in \mathbb{R}^3 \colon \ \operatorname{dist}(a,K) \geq \delta\},$$

donde $\operatorname{dist}(a,K) := \inf\{|a-x| \colon x \in K\}$.