La integral de la derivada (la regla de Barrow–Newton–Leibniz para funciones absolutamente continuas)

Objetivos. Demostrar que para funciones absolutamente continuas se cumple el segundo teorema fundamental de cálculo (la regla de Barrow–Newton–Leibniz).

Requisitos. El teorema sobre la derivada de la integral de funciones Lebesgue integrables (el primer teorema de cálculo para funciones Lebesgue integrables), funciones absolutamente continuas y sus propiedades.

1 Lema. *Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Supongamos que $F' = 0$ c.t.p. Entonces F es una constante.*

Demostración. Elijamos c en $(a,b]$. Queremos demostrar que $F(c) = F(a)$. Sea $A \subseteq (a,c)$ tal que $\mu(A) = c - a$ y $F'(x) = 0$ para todo x en A.

Sean $\eta > 0$ y $\varepsilon > 0$ arbitrarios. Encontramos δ como en la definición de funciones absolutamente continuas. Por la definición de la derivada, para todo x en A existe un $\rho_x > 0$ tal que $x+\rho_x < b$ y para cada y en $(x, x+\rho_x)$ se cumple que $|f(y)-f(x)| \le \eta(y-x)$. La colección $\mathcal{V} = \{[x,y]\colon\ x \in A,\ y \in (x, x+\rho_x)\}$ es una cubierta de Vitali de A. Apliquemos el lema de Vitali con δ y elijamos una lista finita $([x_k,y_k])_{k=1}^m$ de intervalos disjuntos pertenecientes a $\mathcal{V}$, tal que

$$\mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^m [x_k,y_k]\right) < \delta.$$

Podemos suponer que $x_1 < x_2 < \ldots < x_m$. Pongamos $y_0 = a$, $x_{m+1} = c$. Luego

$$a = y_0 \le x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < \ldots < x_m < y_m \le x_{m+1} = c.$$

Entonces

$$\sum_{k=0}^m (x_{k+1} - y_k) = \mu\left([a,c] \setminus \bigcup_{k=1}^m [x_k,y_k]\right) = \mu\left(A \setminus \bigcup_{k=1}^m [x_k,y_k]\right) < \delta.$$

Por la elección de δ,

$$\sum_{k=0}^m |F(x_{k+1}) - F(y_k)| < \varepsilon.$$

Por otra parte,

$$\sum_{k=1}^m |F(y_k) - F(x_k)| \le \eta \sum_{k=1}^m (y_k - x_k) \le \eta(c-a).$$

Luego

$$|F(c) - F(a)| \le \sum_{k=0}^m |F(x_{k+1}) - F(y_k)| + \sum_{k=1}^m |F(y_k) - F(x_k)| \le \varepsilon + \eta(c-a).$$

Como ε y η son arbitrarios, $F(c) = F(a)$. □

2 Observación. El resultado del lema no siempre se cumple para funciones de clase $\mathrm{BV}([a,b])$.

3 Teorema (cada función absolutamente continua es la integral indefinida de su derivada)**.** *Sea* $F \in \mathrm{AC}([a,b])$*. Entonces para cada* x *en* $[a,b]$*,*

$$F(x) = F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Demostración. Como $F \in \mathrm{BV}([a,b])$, F' existe casi en todas partes y es una función integrable.

Consideremos

$$G(x) \coloneqq F(a) + \int_a^x F'(t)\,\mathrm{d}t, \qquad H \coloneqq F - G.$$

Entonces $G \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $H \in \mathrm{AC}([a,b])$. El teorema sobre la derivada de la integral indefinida (el primer teorema de cálculo) dice que $G' = F'$ c.t.p. Por eso $H' = 0$ c.t.p., y por el Lema 1 la función H es una constante. Tenemos $H(x) = H(a) = 0$ para todo x en $[a,b]$, y $F = G$. $\square$

4 Corollary (criterio de una función absolutamente continua)**.** *Sea* $F\colon [a,b] \to \mathbb{C}$*. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) $F \in \mathrm{AC}([a,b])$*,*

(b) existe f *en* $L^1([a,b],\mathbb{C})$ *tal que para cada* x *en* $[a,b]$

$$F(x) = F(a) + \int_a^b f\,\mathrm{d}\mu.$$

5 Ejercicio (fórmula para la variación total de una función absolutamente continua)**.** Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Demostrar que

$$\mathrm{Var}_a^b(F) = \int_a^b |F'(t)|\,\mathrm{d}t.$$

6 Ejercicio (fórmula para la variación positiva de una función absolutamente continua)**.** Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b],\mathbb{R})$. Demostrar que

$$\mathrm{PVar}_a^b(F) = \int_a^b P(F'(t))\,\mathrm{d}t,$$

donde

$$P(u) \coloneqq \begin{cases} u, & u \ge 0; \\ 0, & u < 0. \end{cases}$$

7 Ejercicio. Sea $F \in \mathrm{AC}([a,b])$. Demostrar que F es acotada en $[a,b]$.

8 Ejercicio (cociente de dos funciones absolutamente continuas)**.** Sean $F, G \in \mathrm{AC}([a,b])$, y $G'(x) \neq 0$ para todo $x \in [a,b]$. Demostrar que $F/G \in \mathrm{AC}([a,b])$.

9 Ejercicio. Para cada F en $\mathrm{AC}([a,b])$ pongamos

$$\|F'\| \coloneqq |F(a)| + \int_a^b |F'| \,\mathrm{d}\mu.$$

Verificar que $\|\cdot\|$ es una norma (es fácil). Demostrar que $\mathrm{AC}([a,b])$ con esta norma es un espacio de Banach.

10 Ejercicio (criterio de función Lipschitz continua en términos de su derivada)**.** Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Demostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f \in \mathrm{Lip}([a,b])$,

(b) $f \in \mathrm{AC}([a,b])$ y $f' \in L^\infty([a,b])$.

11 Definición (función singular)**.** Una función $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ se llama *singular* si es creciente y continua, $f' = 0$ c.t.p. en $[a,b]$ y $f(b) > f(a)$.

Para funciones singulares no se cumple la regla de Barrow–Newton–Leibniz: si f es singular, entonces

$$\int_a^b f' \,\mathrm{d}\mu = 0 < f(b) - f(a).$$

12 Ejercicio. Demostrar que cada función creciente es la suma de una función absolutamente continua y una función singular.

Tareas adicionales: ejemplos de funciones singulares

13 Tarea adicional (escalera de Cantor)**.** Explicar la construcción de la función conocida como la *escalera de Cantor*. Demostrar que esta función es continua y creciente (por eso es también de variación acotada), pero no es absolutamente continua. Mostrar que esta función es singular en el sentido de la Definición 11.

14 Tarea adicional (el signo de interrogación de Minkowski)**.** Explicar la construcción de la función conocida como el *signo de interrogación de Minkowski*. Demostrar que esta función es singular.