Tareas (funciones definidas por integrales)

1. Continuidad de la integral de Dirichlet con la función exponente. Demostrar que la integral impropia

$$\int_0^{\to +\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

converge uniformemente en $[0, +\infty)$, y la función

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{\to +\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

es continua en $[0, +\infty)$.

2. Cálculo de la integral de Dirichlet a través de la derivación respecto al parámetro. Demostrar que para todo $\lambda \geq 0$

$$\boxed{\int_0^{\to +\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg} \lambda.}$$

Indicación. Considerar la función

$$\Phi(\lambda) := \int_0^{\to +\infty} e^{-\lambda x} \frac{\sin x}{x}\, dx,$$

calcular su derivada, después calcular $\Phi(\lambda)$.

3. Integrales de Fresnel. Demostrar las fórmulas:

$$\boxed{\int_0^{\to +\infty} \cos x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}},} \qquad \boxed{\int_0^{\to +\infty} \sin x^2\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.}$$

Indicación. Hacer el cambio de variable $t = x^2$, aplicar la fórmula

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2}\, du,$$

invertir el orden de las integraciones.

4. Fórmula de los complementos para la función Γ. Demostrar que para todo $x \in (0,1)$

$$\boxed{\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}.}$$

Indicación. Demostrar al principio que

$$\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{1+y}\,dy.$$

Para $x \in (0,1)$ fijo, considerar la función

$$f(\lambda) := \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^{x-1}}{e^{i\lambda}y+1}\,dy \qquad (\lambda \in (-\pi,\pi)).$$

Demostrar que $f'(\lambda) = -ixf(\lambda)$. De aquí $f(\lambda) = g(x)e^{-i\lambda x}$, donde $\gamma(x)$ depende solamente de x. Mostrar que para $\lambda \in (0,\pi)$

$$g(x)\sin(\lambda x) = \frac{f(-\lambda)-f(\lambda)}{2i} = \sin\lambda \int\limits_0^{+\infty} \frac{y^x\,dy}{y^2+2y\cos\lambda+1} = \int\limits_{\cot\lambda}^{+\infty} \frac{(u\sin\lambda-\cos\lambda)^2}{1+u^2}\,du.$$

Pasando al límite para $\lambda \to \pi$, probar que $g(x) = \frac{\pi}{\sin(\pi x)}$.

5. Continuidad y derivadas parciales del potencial volúmico. Sea K un compacto en $\mathbb{R}^3$, $\rho\colon K \to \mathbb{R}$ una función medible y acotada. Mostrar que la función

$$U(a) := \int\limits_K \frac{\rho(x)\,dx}{|x-a|}$$

es continua en $\mathbb{R}^3$ y calcular sus derivadas parciales.

Indicación. Escribir U en forma

$$U(a) = V_r(a) + W_r(a) \quad \text{con} \quad V_r(a) = \int\limits_{|x-a|\le r} \frac{\rho(x)\,dx}{|x-a|}, \quad W_r(a) = \int\limits_{|x-a|>r} \frac{\rho(x)\,dx}{|x-a|}.$$

Obtener una mayoración $|V_r(a)| < kr^2$ con k constante y probar de allí que $W_{1/\nu}(a) \overset{a\in\mathbb{R}^3\Rightarrow}{U}$ (a) cuando $\nu \to \infty$.

Para demostrar que $\partial_1 U(a) = U_1(a) := \int_K \rho(x)\frac{x_1-a_1}{|x-a|^3}\,dx$, probar la fórmula

$$\int\limits_{b_1}^{c_1} U_1(a_1,a_2,a_3)\,da_1 = U(c_1,a_2,a_3) - U(b_1,a_2,a_3).$$

6. Regla de Leibniz con límites variables. Sean I y J intervalos abiertos en $\mathbb{R}$, $f\colon I \times J \to \mathbb{R}$ una función continua. Se supone que para todo $(x, y) \in I \times J$ existe la derivada parcial $\partial_2 f(x, y)$ y que existe $g \in \mathcal{L}^1(I)$ tal que $|\partial_2 f(x, y)| \leq g(x)$ para todo $(x, y) \in I \times J$. Sean φ y ψ funciones derivables $J \to I$. Se define para todo $y \in J$:

$$\Phi(y) := \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)\, dx.$$

Probar que Φ es derivable y

$$\boxed{\Phi'(y) = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \partial_2 f(x, y)\, dx + \varphi'(y) f(\varphi(y), y) - \psi'(y) f(\psi(y), y).}$$

Indicación. Para un y fijo en J, escribir $\Phi(y + h)$ en forma

$$\Phi(y + h) = \int_{\psi(y)}^{\varphi(y)} f(x, y)\, dx + \int_{\varphi(y)}^{\varphi(y+h)} f(x, y)\, dx - \int_{\psi(y)}^{\psi(y+h)} f(x, y)\, dx.$$

7. Cálculo de la integral de Poisson. Demostrar que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.}$$

Indicación. Considerar las funciones

$$I(L) := \int_{-L}^{L} e^{-x^2}\, dx, \qquad g(R) := \int_{x^2+y^2 \leq R^2} e^{-x^2-y^2}\, dx\, dy,$$

calcular $g(R)$ usando coordenadas polares, y mostrar que $g(L) \leq I(L)^2 \leq g(L\sqrt{2})$.