Integración de funciones definidas por integrales impropias

Objetivos. Vamos a establecer condiciones suficientes para el intercambio del orden de dos integrales, cuando una de las dos integrales es impropia:

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\nu(y) = \int\limits_a^{\to b} \left(\int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}x.$$

Requisitos. El teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, integrales impropias.

1. Teorema (sobre el intercambio de dos integrales, cuando una de estas dos integrales es impropia). Sea $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ un espacio de medida σ-finita, sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$ tales que $a < b$, y sea $f\colon (a,b) \times Y \to \mathbb{C}$. Se supone:

(i) para cada t en (a,b), la función f es integrable en $(a,t) \times Y$;

(ii) para casi todo y en Y, existe la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$;

(iii) existen $u \in (a,b)$ y $h \in L^1(Y, [0, +\infty])$ tales que para casi todo y en Y y todo t en (u,b) se cumple la desigualdad

$$\left| \int\limits_a^t f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| \le h(y).$$

Entonces

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\nu(y) = \int\limits_a^{\to b} \left(\int\limits_Y f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Demostración. 1. En la desigualdad (iii) pasamos al límite cuando t tiende a b. Gracias a la condición (ii), el límite del lado izquierdo existe. Obtenemos que para casi todo y en Y se cumple la siguiente cota superior:

$$\left| \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| \le h(y). \tag{2}$$

Por lo tanto la integral de Lebesgue en el primer miembro de (1) existe:

$$\int\limits_Y \left| \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| \mathrm{d}\nu(y) \le \int\limits_Y h\,\mathrm{d}\nu < +\infty.$$

Denotemos por L al valor de la integral en el primer miembro de (1):

$$L := \int\limits_{Y} \left(\int\limits_{a}^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\nu(y).$$

2. Definimos $F\colon (a,b) \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:

$$F(t) := \int\limits_{a}^{t} \left(\int\limits_{Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}x.$$

Esta definición es consistente por la condición (i). Vamos a demostrar que

$$\lim_{t\to b} F(t) = L.$$

Usamos el criterio de Heine. Sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una sucesión en (a,b) convergente al punto b. Pongamos

$$g_k(y) := \int\limits_{a}^{t_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Entonces $|g_k| \le h$ y para casi todo y en Y, por la condición (ii), se tiene la siguiente relación límite:

$$\lim_{k\to\infty} g_k(y) = \int\limits_{a}^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x.$$

Apliquemos el teorema de Lebesgue de la convergencia dominada:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{Y} g_k\,\mathrm{d}\nu = \int\limits_{Y} \left(\lim_{k\to\infty} g_k \right) \mathrm{d}\nu.$$

El lado derecho de esta fórmula coincide con L. En el lado izquierdo aplicamos el teorema de Fubini usando la suposición (i):

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{Y} \left(\int\limits_{a}^{t_k} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\nu = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{a}^{t_k} \left(\int\limits_{Y} f(x,y)\,\mathrm{d}\nu \right) \mathrm{d}x = \lim_{k\to\infty} F(t_k).$$

Hemos demostrado que $\lim_{k\to\infty} F(t_k) = L$. Por el criterio de Heine, concluimos que $\lim_{t\to b} F(t) = L$. $\square$

2. Teorema. Sea $(Y, \mathcal{G}, \nu)$ un espacio de medida finita, sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$ tales que $a < b$, y sea $f\colon (a, b) \to \mathbb{C}$. Se supone:

(i) para cada t en (a, b), f es integrable en $(a, \beta) \times Y$;

(ii) para todo y en Y y todo t en (a, b) existe la integral $\int_a^t f(x, y)\,\mathrm{d}x$.

(iii) la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ converge uniformemente en Y.

Entonces

$$\int\limits_Y \left(\int\limits_a^{\to b} f(x, y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}\nu(y) = \int\limits_a^{\to b} \left(\int\limits_Y f(x, y)\,\mathrm{d}\nu(y) \right) \mathrm{d}x.$$

3. Ejercicio. Demuestre el Teorema 2.

4. Ejemplo: el cálculo de la integral de Dirichlet. Puesto que

$$\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{x},$$

se tiene:

$$\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^{\to+\infty} \operatorname{sen} x \left(\int\limits_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x.$$

Muestre que se puede invertir el orden de las integrales y así calcule la integral impropia

$$\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x.$$