Integrales impropias dependientes de un parámetro

1. Definición (convergencia uniforme de integrales impropias dependientes de un parámetro). Sea Y un conjunto y sea $f\colon [a,b) \times Y \to \mathbb{C}$. Se supone que para todo y en Y la función $x \mapsto f(x,y)$ es integrable en todo intervalo $[a,t]$, donde $a \le t < b$. Se dice que *la integral impropia* $\int_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ *es uniformemente convergente* si existe el límite uniforme respecto a y en Y de la expresión $\int_a^t f(x,y)\,\mathrm{d}x$, cuando $t \to b$.

2. Proposición (criterio de convergencia uniforme de integrales impropias dependientes de un parámetro). Supongamos que se cumplen las condiciones de la Definición 1. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ es uniformemente convergente;

(b) para cada y la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ es convergente y, además, para cada $\varepsilon > 0$ existe un $u \in (a,b)$ tal que para cada t en (u,b) y cada y en Y

$$\left| \int\limits_t^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Demostración. 1. Supongamos que la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ converge uniformemente a una función $h\colon Y \to \mathbb{C}$, es decir,

$$\lim_{t\to b} \sup_{y\in Y} \left| \int\limits_a^t f(x,y)\,\mathrm{d}x - h(y) \right| = 0. \tag{1}$$

Entonces para cada y en Y tenemos

$$\lim_{t\to b} \left| \int\limits_a^t f(x,y)\,\mathrm{d}x - h(y) \right| = 0,$$

lo cual implica que la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ converge a $g(y)$. Además, el valor absoluto de la diferencia de las integrales en (1) se puede escribir como

$$\left| \int\limits_t^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x \right|.$$

2. Supongamos que se cumple la condición (b). Entonces tenemos (1). □

3. Teorema (criterio de Cauchy para la convergencia uniforme de integrales impropias). Sea f como en la Definición 1. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) la integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y)$ es uniformemente convergente;

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists t \in (a,b)$ tal que

$$\forall u, v \in [t,b) \qquad \forall y \in Y \qquad \left| \int_u^v f(x,y)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon.$$

Demostración. Definimos $g\colon [a,b) \times Y \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:

$$g(u,y) \coloneqq \int_a^u f(x,y)\,difx.$$

Entonces la condición (b) se puede escribir de la siguiente manera:

(b') para cada $\varepsilon > 0$ existe $t \in (a,b)$ tal que para cualesquiera u, v en $[t,b)$ y cada y en Y

$$|g(u,y) - g(v,y)| < \varepsilon.$$

1. Supongamos que la integral impropia converge uniformemente a una función h. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $t \in (a,b)$ tal que para cada $u \in [t,b)$ y cada $y \in Y$

$$|g(u,y) - h(y)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Luego para cualesquiera $u, v \geq t$ tenemos

$$|g(u,y) - g(v,y)| \leq |g(u,y) - h(y)| + |h(y) - g(v,y)| < \varepsilon.$$

Hemos demostrado que se cumple la condición (b'), pero (b') es equivalente a (b).

2. Supongamos que se cumple (b). Entonces para cada y en Y la función $u \mapsto g(u,y)$ cumple con las condiciones de Cauchy para la existencia del límite de una función, así que existe un límite finito $h(y) \coloneqq \lim_{u\to b} g(u,y)$. Además, pasando en (b') al límite cuando $v \to b$, obtenemos

$$\forall u \in [t,b) \qquad \forall y \in Y \qquad |g(u,y) - h(y)| < \varepsilon,$$

lo cual significa que $g(u,y) \underset{u\to b}{\overset{y\in Y}{\Longrightarrow}} h(y)$. □

4. Ejemplo. Mostrar que la integral impropia

$$\int_0^{\to+\infty} e^{-xy}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x$$

es uniformemente convergente con respecto a y en $[0,+\infty)$.

5. Teorema (intercambio del límite con la integración impropia). Sea $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $(a,b)\to\mathbb{C}$. Se supone:

(i) $\forall\nu\in\mathbb{N}\quad\forall t\in[a,b)\quad f_\nu|_{(a,t)}\in L^1((a,t))$.

(ii) $\lim\limits_{\nu\to\infty} f_\nu(x)=g$ c.t.p. en (a,b).

(iii) $\forall t\in(a,b)\quad g|_{(a,t)}\in L^1((a,t))$ y $\lim\limits_{\nu\to\infty}\int\limits_a^t f_\nu=\int\limits_a^t g$.

(iv) la integral impropia $\int_a^{\to b} f_\nu(x)\,\mathrm{d}x$ converge uniformemente con respecto a $\nu\in\mathbb{N}$.

Entonces la integral impropia $\int_a^{\to b} g(x)\,\mathrm{d}x$ es convergente y

$$\int\limits_a^{\to b} g(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{\nu\to\infty}\int\limits_a^{\to b} f_\nu(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Demostración. 1. Usando el criterio de Cauchy demostremos que la integral impropia $\int_a^{\to b} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Sea $\varepsilon>0$. Usando la condición (d) y el criterio de Cauchy de la convergencia uniforme para integrales impropias, encontramos t en (a,b) tal que para cualesquiera u,v con $t<u<v$ y cualquier ν en $\mathbb{N}$ se cumple la desigualdad

$$\left|\int\limits_u^v f_\nu\,\mathrm{d}\mu\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Sean u,v tales que $t<u<v$. Usando la condición (iii), encontramos ν en $\mathbb{N}$ tal que

$$\left|\int\limits_a^u f_\nu\,\mathrm{d}\mu-\int\limits_a^u g\,\mathrm{d}\mu\right|<\frac{\varepsilon}{3},\qquad\left|\int\limits_a^v f_\nu\,\mathrm{d}\mu-\int\limits_a^v g\,\mathrm{d}\mu\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces obtenemos

$$\left|\int\limits_u^v g\,\mathrm{d}\mu\right|<\varepsilon.$$

Por el criterio de Cauchy, la integral impropia $\int_a^{\to b} g$ converge.

2. Demostremos la fórmula (2). Sea $\varepsilon>0$. Usando la convergencia de la integral impropia $\int_a^{\to b} g$, encontramos $t_1\in(a,b)$ tal que para cada u en (t_1,b) se cumple

$$\left|\int\limits_a^u g-\int\limits_a^{\to b} g\right|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Usando la convergencia uniforme (respecto a ν) de la integral impropia $\int_a^{\to b} f_\nu$, encontramos $t_2 \in (a,b)$ tal que para cada u en (t_2,b) se cumple

$$\left| \int_a^u f_\nu - \int_a^{\to b} f_\nu \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Elegimos u en $(\max\{t_1,t_2\},b)$. Usando la condición (iii) encontramos ν_0 en $\mathbb{N}$ tal que para cada $\nu \geq \nu_0$ se cumple la desigualdad

$$\left| \int_a^u f_\nu - \int_a^u g \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Entonces para cada $\nu \geq \nu_0$ se cumple

$$\left| \int_a^{\to b} f_\nu - \int_a^{\to b} g \right| \leq \left| \int_a^u f_\nu - \int_a^{\to b} f_\nu \right| + \left| \int_a^u f_\nu - \int_a^u g \right| + \left| \int_a^u g - \int_a^{\to b} g \right| < \varepsilon.$$

Notemos que los razonamientos de la demostración son muy comunes en análisis y se conocen como "razonamientos con $\varepsilon/3$". $\square$

6. Observación. La condición (iii) del teorema anterior se cumplirá, en particular, en cada uno de los siguientes casos:

(iii') si para todo t en (a,b) existe una función $h_t \in L^1((a,t))$ tal que $|f_\nu(x)| \leq h_t(x)$ para cada ν en $\mathbb{N}$ y cada x en (a,t);

(iii") si $a \in \mathbb{R}$ (i.e. a es un punto finito) y la sucesión $(f_\nu)_{\nu\in\mathbb{N}}$ converge a g uniformemente en (a,t) para cada t en (a,b).

7. Teorema (continuidad de una función definida por una integral impropia). Sea Y un espacio métrico, $z \in Y$, $f\colon (a,b) \times Y \to \mathbb{C}$. Se supone:

(i) Para cada y en Y y cada t en (a,b), la función $x \mapsto f(x,y)$ es integrable en (a,t)

(ii) Para casi todo x en (a,b), la función $y \mapsto f(x,y)$ es continua en el punto z.

(iii) Para cada t en (a,b), la función $y \mapsto \int_a^t f(x,y)$ es continua en el punto z.

Esta condición se cumple, en particular, para cada t en (a,b) existe una función $h_t \in L^1((a,t))$ tal que $|f(x,y)| \leq h_t(x)$ para casi todo $x \in (a,t)$ y todo $y \in Y$.

(iv) La integral impropia $\int_a^{\to b} f(x,y)$ es uniformemente convergente en Y.

Entonces la función $\Phi\colon Y \to \mathbb{C}$, definida por

$$\Phi(y) := \int_a^{\to b} f(x,y)\,\mathrm{d}x,$$

es continua en el punto z.

Demostración. Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en Y que converge a z. Pongamos $f_\nu(x) := f(x,y_n)$, $g(x) := f(x,z)$. Entonces se cumplen las condiciones del Teorema 5, y obtenemos que $\Phi(y_n) \to \Phi(z)$. Por el criterio de Heine, concluimos que la función Φ es continua en z. □

8. Ejemplo. Mostrar que la función

$$\Phi(y) := \int_0^{\to+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\,\frac{\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x \qquad (y \geq 0)$$

está bien definida y continua en el intervalo $[0,+\infty)$. Se recomienda demostrar la continuidad en cualquier punto z positivo y en el punto $z = 0$.