Criterios de Abel y Dirichlet para la convergencia de integrales impropias

1. Teorema (criterios de Abel y Dirichlet para la convergencia de integrales impropias).

1. Sea $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ una función monótona en $[a,b)$.
2. Sea $g\colon [a,b) \to \mathbb{C}$ una función integrable en todo intervalo de la forma $[a,t]$, donde $a < t < b$, y sea
$$G(x) \coloneqq \int_a^x g \qquad (a \le x < b).$$

Además, supongamos que se cumple al menos una de las siguientes condiciones:

3A. f es acotada en $[a,b)$ y la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\to b} g$ es convergente.

3D. $\displaystyle\lim_{x\to b} f(x) = 0$ y G es acotada en $[a,b)$.

Entonces la integral impropia $\displaystyle\int_a^{\to b} fg$ es convergente.

Demostración. Notemos que en la condición 3A existe un límite finito $\displaystyle\lim_{t\to b} G(t)$. Por eso la función G es acotada en ambos casos 3A y 3D.

Para demostrar la convergencia de la integral impropia $\int_a^{\to b} fg$, apliquemos el criterio de Cauchy. Supongamos que $a \le x_1 < x_2 < b$ y acotemos la integral $\int_{x_1}^{x_2} fg$ usando el segundo teorema del valor medio de Bonnet:

$$\begin{aligned}\left|\int_{x_1}^{x_2} fg\right| &\le \big(|f(x_1)| + 2|f(x_2)|\big) \sup_{x_1 \le t \le x_2} \left|\int_{x_1}^{t} g\right| \\ &= \big(|f(x_1)| + 2|f(x_2)|\big) \sup_{x_1 \le t \le x_2} \big|G(t) - G(x_1)\big|.\end{aligned}$$

Si se cumple 3A y $L = \lim_{x\to b} G(x)$, entonces aplicamos la desigualdad

$$|G(t) - G(x_1)| \le |G(t) - L| + |G(x_1) - L|$$

y obtenemos

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} fg\right| \le 6 \left(\sup_{x\in[a,b)} |f(x)|\right) \sup_{t \ge x_1} |G(t) - L|.$$

Si se cumple 3D, entonces

$$\left|\int\limits_{x_1}^{x_2} fg\right| \le 6|f(x_1)| \sup_{x\in[a,b)} |G(x)|.$$

En ambos casos, la integral considerada tiende a cero, cuando x_1 tiende al punto b. $\square$

Ejemplos

2. Para todo $\alpha > 1$, las integrales impropias

$$\int\limits_1^{\to+\infty} \frac{\cos x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x, \qquad \int\limits_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

convergen absolutamente.

3. Para todo $\alpha \in (0, 1]$, las integrales impropias (1) convergen.

4. Las integrales $\displaystyle\int\limits_1^{\to+\infty} \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x$ y $\displaystyle\int\limits_1^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ no convergen absolutamente.

5. Para todo $\alpha \in (0, 1]$, las integrales impropias (1) no convergen absolutamente.

6. Para todo $\alpha \le 0$, las integrales impropias (1) divergen.

7. Integrales impropias de Fresnel. Las integrales impropias

$$\int\limits_0^{\to+\infty} \cos x^2\,\mathrm{d}x \qquad \text{y} \qquad \int\limits_0^{\to+\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$$

convergen, pero no absolutamente.

8. Para todo $\alpha \in (0, 1]$, la integral impropia

$$\int\limits_1^{\to+\infty} \operatorname{arc\,tg} x\,\frac{\sin x}{x^\alpha}\,dx$$

converge, pero no absolutamente.