Ejemplos de productos internos

Objetivos. Conocer algunos ejemplos de productos internos. Para algunos ejemplos de formas sesquilineales, encontrar condiciones necesarias y suficientes para que estas formas sesquilineales sean productos internos.

1 Observación. En este tema usamos libremente las siguientes propiedades de la conjugación de números complejos:

1. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $\overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}$.
3. $\overline{\overline{z}} = z$.
4. $z\,\overline{z} = |z|^2$.
5. $\overline{z} = z \qquad \Longleftrightarrow \qquad z \in \mathbb{R}$.

2 Lema. *Sea $d \in \mathbb{C}^n$. Definimos $p\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:*

$$p(u,v) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k}.$$

Sea $j \in \{1,\ldots,n\}$. Entonces

$$p(e_j, e_j) = d_j.$$

Demostración.

$$p(e_j, e_j) = \sum_{k=1}^{n} d_k \delta_{j,k} \overline{\delta_{j,k}} = d_j.$$

$\square$

3 Proposición. *Sea $d \in \mathbb{C}^n$. Definimos $p\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:*

$$p(u,v) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k}.$$

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) p es conjugada simétrica:

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^n \qquad p(v, u) = \overline{p(u, v)};$$

(b) $d \in \mathbb{R}^n$, esto es, $d_j \in \mathbb{R}$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos (b). Entonces la condición (a) se verifica de manera directa. Para cada u, v en $\mathbb{C}^n$,

$$\overline{p(u, v)} = \overline{\sum_{k=1}^{n} d_k u_k \overline{v_k}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{d_k u_k \overline{v_k}} = \sum_{k=1}^{n} \overline{d_k}\, \overline{u_k}\, \overline{\overline{v_k}} = \sum_{k=1}^{n} d_k\, \overline{u_k}\, v_k = p(v, u).$$

(b)⇒(a). Supongamos (b). Elegimos j en $\{1, \ldots, n\}$. Apliquemos el Lema 2 y la condición (b):

$$d_j = p(e_j, e_j) = \overline{p(e_j, e_j)} = \overline{d_j}.$$

Concluimos que $d_j \in \mathbb{R}$. □

4 Proposición. *Sea $d \in \mathbb{C}^n$. Definimos $p\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:*

$$p(u, v) \coloneqq \sum_{k=1}^{n} u_k \overline{v_k}.$$

Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:

(a) p es un producto interno;

(b) $d \in (0, +\infty)^n$, esto es, $d_j > 0$ para cada j en $\{1, \ldots, n\}$.

Demostración. (b)⇒(a). Supongamos (b). Ya sabemos que p es hermítica. Nos falta verificar que p es positiva definida. Supongamos que $u \in \mathbb{C}^n \setminus \{0_n\}$. Encontramos j en $\{1, \ldots, n\}$ tal que $u_j \neq 0$. Entonces

$$p(u, u) = \sum_{k=1}^{n} d_k |u_k|^2 = d_j |u_j|^2 + \sum_{k \in \{1,\ldots,n\} \setminus \{j\}} d_k |u_k|^2 \geq d_j |u_j|^2 > 0.$$

(a)⇒(b). Supongamos que p es un producto interno. Sea $j \in \{1, \ldots, n\}$. Notamos que $e_j \neq 0_n$. Apliquemos el Lema 2 y la propiedad positiva definida de p:

$$d_j = p(e_j, e_j) > 0.$$ □

5 Ejercicio. Sea $d \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Denotemos por c_{fin} al espacio de las sucesiones de soporte finito. Definimos $f\colon c_{\text{fin}} \times c_{\text{fin}} \to \mathbb{C}$,

$$f(z,w) \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty} d_j z_j \overline{w_j}.$$

Ya sabemos que f es una forma sesquilineal.

1. Para cada m en $\mathbb{N}$, calcular $f(e_m, e_m)$.

2. Demostrar que f es hermítica si, y sólo si, $d \in \mathbb{R}^{\infty}$.

3. Demostrar que f es un producto interno si, y sólo si, $d \in (0, +\infty)^{\mathbb{N}}$.

6 Ejercicio. Sea $d \in \ell^{\infty}$. Definimos $f\colon \ell^2 \times \ell^2 \to \mathbb{C}$,

$$f(z,w) \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty} d_j z_j \overline{w_j}.$$

Ya sabemos que f es una forma sesquilineal.

1. Para cada m en $\mathbb{N}$, calcular $f(e_m, e_m)$.

2. Demostrar que f es hermítica si, y sólo si, $d_j \in \mathbb{R}$ para cada j en $\mathbb{N}$.

3. Demostrar que f es un producto interno si, y sólo si, $d_j > 0$ para cada j en $\mathbb{N}$.

7 Ejercicio. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$, y sea $H = C([a,b], \mathbb{C})$. Supongamos que $w \in C([a,b], \mathbb{C})$. Definimos $f\colon H \times H \to \mathbb{C}$,

$$f(u,v) \coloneqq \int_a^b w(t) u(t) \overline{v(t)} \, \mathrm{d}t.$$

Ya sabemos que f es una forma sesquilineal.

1. Demostrar que si $h \in C([a,b], [0, +\infty))$ y $\int_a^b h(t) \, \mathrm{d}t = 0$, entonces $h(t) = 0$ para cada t en $[a,b]$.

2. Demostrar que f es hermítica si, y sólo si, $w(t) \in \mathbb{R}$ para cada t en $[a,b]$.

3. Demostrar que f es un producto interno si, y sólo si, $w(t) > 0$ para cada t en $[a,b]$.

El criterio de matrices positivas definidas (repaso)

8 Ejercicio. Sean $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Supongamos que

$$\forall u, v \in \mathbb{C}^n \qquad v^* A u = v^* B u.$$

Demostrar que $A = B$. Sugerencia: sustituir en vez de u y v los vectores de la base canónica de $\mathbb{C}^n$.

9 Ejercicio. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Definimos $f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$,

$$f(u, v) \coloneqq v^* A u,$$

donde v^* es el vector v transpuesto conjugado. Demostrar que f es hermítica si, y sólo si, $A^* = A$.

10 Ejercicio (el criterio de matriz positiva definida)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tal que $A^* = A$. Definimos $f\colon \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$,

$$f(u, v) \coloneqq v^* A u,$$

donde v^* es el vector v transpuesto conjugado. Recordar una demostración que las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) f es un producto interno;

(b) $\operatorname{Sp}(A)$ es un subconjunto de $(0, +\infty)$;

(c) para cada m en $\{1, \ldots, n\}$, $\det(B_m) > 0$, donde B_m es la m-ésima submatriz de esquina de la matriz A:

$$B_m \coloneqq \big[A_{j,k}\big]_{j,k=1}^{m}.$$