Propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier

Objetivos. Demostrar que la correspondencia entre funciones 2π-periódicas integrables y sus coeficientes de Fourier es inyectiva.

Denotamos por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Vamos a empezar con un caso particular y poco a poco generalizar.

Lema 1. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces $f(0) = 0$.*

Demostración. Razonando por contraposición, supongamos que $f(0) \neq 0$. Sustituyendo f por $f/f(0)$, podemos considerar el caso $f(0) = 1$. Como f es continua, existe $\delta \in (0, \pi)$ tal que $f(x) \geq 1/2$ en $A = [-\delta, \delta]$. Sea

$$g(x) = 1 + \cos(x) - \cos(\delta) = 1 - \cos(\delta) + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\,x}}{2}, \qquad g_n(x) = (g(x))^n.$$

Entonces $g_n(x) \geq 1$ para cada x en A, $g_n(x) \to 0$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$. Notemos que g_n se puede escribir como una combinación lineal de las funciones básicas de Fourier. Como $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$, concluimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, g_n(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Por otro lado, en el conjunto $[-\pi, \pi] \setminus I$ los productos $|f g_n|$ se pueden acotar por la función integrable $|f|$, y por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{n \to 0} \int_{[-\pi,\pi]\setminus I} f(x) g_n(x)\, \mathrm{d}x = 0.$$

Luego

$$\lim_{n \to 0} \int_{I} f(x) g_n(x)\, \mathrm{d}x = 0,$$

lo cual contradice al hecho que $f(x) g_n(x) \geq 1/2$ para cada x en I. $\square$

Lema 2. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces $f = 0$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Pongamos $g(x) \coloneqq f(x - x_0)$. Entonces $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x - x_0)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x_0}}{2\pi} \int_{-x_0}^{2\pi - x_0} f(t)\, \mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,t}\, \mathrm{d}t = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x_0}\, \widehat{f}_k = 0.$$

Por el lema anterior, $g = 0$. Luego $f = 0$. $\square$

Lema 3. *Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces $f = 0$ μ-c.t.p.*

Demostración. Pongamos

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Aplicando el teorema de Fubini obtenemos

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{-\mathrm{i}\,kx}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt\right)\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\int_{t}^{\pi} e^{-\mathrm{i}\,kx}\,dx\right)\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{e^{-\mathrm{i}\,k\pi} - e^{-\mathrm{i}\,kt}}{-\mathrm{i}\,k}\,\mathrm{d}t = 0.\end{aligned}$$

Entonces $\widehat{F}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Aplicando el resultado del inciso anterior a la función $F - \widehat{F}_0$ concluimos que F es la constante cero. Por otro lado, $f(x) = F'(x)$ para casi todo x, así que $f = 0$ casi en todas partes. □

Teorema 4. *Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-}per}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces f es nula μ-c.t.p.*

Demostración. Por la definición de los coeficientes de Fourier,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\ \mathrm{d}x = \widehat{f}_k, \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,kx}\ \mathrm{d}x = \widehat{f}_{-k}.$$

De estas igualdades (sumando, restando y multiplicando por factores apropiados) obtenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \cos(kx)\,\mathrm{d}x = \pi(\widehat{f}_k + \widehat{f}_{-k}), \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = \pi\,\mathrm{i}(\widehat{f}_k - \widehat{f}_{-k}).$$

De la suposición se sigue que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = 0 \qquad (k \in \mathbb{N}_0). \tag{1}$$

Sacamos la parte real e imaginaria de estas igualdades:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f)(x)\ \cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}(f)(x)\ \cos(kx)\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f)(x)\ \mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}(f)(x)\ \mathrm{sen}(kx)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Ahora multiplicamos las igualdades con sen por $-\mathrm{i}$ y sumamos con otras:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Re}(f)(x)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\ \mathrm{d}x = 0, \qquad \int\limits_{-\pi}^{\pi} \mathrm{Im}(f)(x)\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\ \mathrm{d}x = 0. \tag{2}$$

Hemos demostrado que los coeficientes de Fourier de $\mathrm{Re}(f)$ e $\mathrm{Im}(f)$ son cero. Por el lema anterior, estas funciones son nulas μ-c.t.p., luego f también es cero μ-c.t.p. $\square$