Propiedad inyectiva de los coeficientes de Fourier

Objetivos. Demostrar que la correspondencia entre funciones 2π-periódicas integrables y sus coeficientes de Fourier es inyectiva.

Denotamos por μ la medida de Lebesgue en $\mathbb{R}$. Vamos a empezar con un caso particular y poco a poco generalizarlo.

Lema 1. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces $f(0) \neq 1$.*

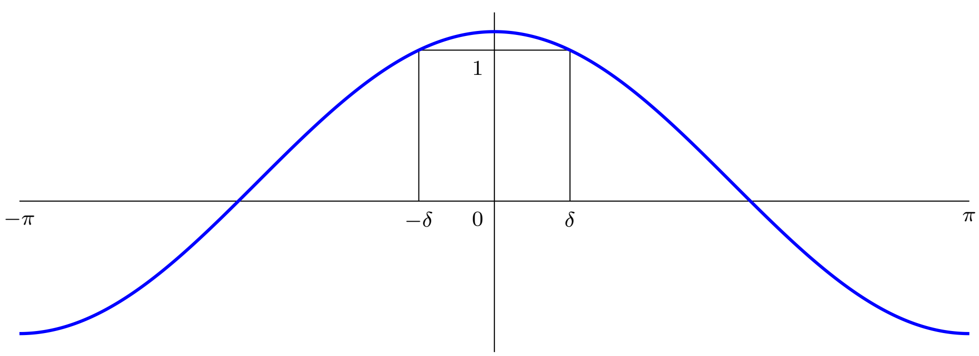
Demostración. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) = 1$. Como f es continua, existe $\delta \in (0, \pi)$ tal que $f(x) \geq 1/2$ en $A = [-\delta, \delta]$. Sea

$$g(x) \coloneqq 1 + \cos(x) - \cos(\delta).$$

De manera equivalente,

$$g(x) = 1 - \cos(\delta) + \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,x} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,x}}{2}.$$

El siguiente dibujo muestra la gráfica de g.



Notamos que $g(x) \geq 1$ para cada x en A y $|g(x)| < 1$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$. Consideremos la siguiente sucesión de funciones:

$$h_n(x) \coloneqq (g(x))^n.$$

Notamos que $h_n(x) \geq 1$ para cada x en A, $h_n(x) \to 0$ para cada x en $[-\pi, \pi] \setminus A$. De la forma que tiene g se sigue que h_n se puede escribir como una combinación lineal de funciones básicas de Fourier:

$$h_n(x) = \sum_{j=-n}^{n} \lambda_{n,j}\, \mathrm{e}^{j\,\mathrm{i}\,x}.$$

Como $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$, concluimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, h_n(x)\, \mathrm{d}x = 2\pi \sum_{j=-n}^{n} \lambda_{n,j} \widehat{f}_{-j} = 0.$$

Por otro lado, en el conjunto $[-\pi,\pi]\setminus A$ los productos $|fh_n|$ se pueden acotar por la función integrable $|f|$, y por el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{[-\pi,\pi]\setminus A} f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Luego

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{A} f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

lo cual contradice al hecho que $f(x)h_n(x) \ge 1/2$ para cada x en A. □

Lema 2. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces, $f(0) = 0$.*

Demostración. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $f(0) \neq 0$. Consideremos la función $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{f(0)}\, f(x).$$

Entonces $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y para cada k en $\mathbb{Z}$ tenemos

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\widehat{f}_k = 0.$$

Por el lema anterior, $g(0) \neq 1$. Contradicción. □

Lema 3. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces, $f = 0$.*

Demostración. Sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Pongamos $g(x) \coloneqq f(x + x_0)$. Entonces, $g \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y para cada k en $\mathbb{Z}$,

$$\widehat{g}_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x+x_0)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,x}\,\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x_0}}{2\pi}\int\limits_{x_0}^{2\pi+x_0} f(t)\,\mathrm{e}^{-k\,\mathrm{i}\,t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{e}^{k\,\mathrm{i}\,x_0}\,\widehat{f}_k = 0.$$

Por el lema anterior, $g(0) = 0$. Luego $f(x_0) = 0$. □

Lema 4. *Sea $f \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces, $f = 0$.*

Demostración. Sean $u \coloneqq \operatorname{Re}(f)$, $v \coloneqq \operatorname{Im}(f)$. Sabemos que

$$\widehat{u}_k = \frac{1}{2}\left(\widehat{f}_k + \overline{\widehat{f}_{-k}}\right), \qquad \widehat{v}_k = \frac{1}{2\,\mathrm{i}}\left(\widehat{f}_k - \overline{\widehat{f}_{-k}}\right).$$

Por el lema anterior, concluimos que $u = v = 0$. Luego $f = 0$. □

Teorema 5. *Sea $f \in L^1_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$ tal que $\widehat{f}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}$. Entonces, $f \overset{\mu\text{-c.t.p.}}{=\!=\!=} 0$.*

Demostración. Pongamos

$$F(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La condición $\widehat{f}_0 = 0$ implica que

$$F(\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}\mu = 2\pi\,\widehat{f}_0 = 0 = F(-\pi).$$

Usando esta igualdad, es fácil demostrar que $F \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R})$.

Notamos que la funcion $(x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} f(t)$ es Lebesgue-integrable en $[-\pi,\pi]\times[-\pi,\pi]$:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} f(t)\right|\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}x = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{d}t = 4\pi^2 \mathcal{N}_{1,2\pi\text{-per}}(f) < +\infty.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el teorema de Fubini a la siguiente integral iterada:

$$\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx} \left(\int_{-\pi}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\int_{t}^{\pi} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kx}\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}t$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\frac{\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,k\pi} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\,kt}}{-\mathrm{i}\,k}\,\mathrm{d}t = -\frac{2\pi(-1)^k}{\mathrm{i}\,k}\widehat{f}_0 + \frac{2\pi}{\mathrm{i}\,k}\widehat{f}_k = 0.$$

Concluimos que $\widehat{F}_k = 0$ para cada k en $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Pongamos

$$G \coloneqq F - \widehat{F}_0.$$

Entonces, $G \in C_{2\pi\text{-per}}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y $\widehat{G}_k = \widehat{F}_k$ para cada k en $\mathbb{Z}\setminus\{0\}$. Además, $\widehat{G}_0 = 0$.

Aplicando el resultado del inciso anterior a la función G concluimos que G es la constante cero, luego F es una constante. Por otro lado, $f(x) = F'(x)$ para casi todo x, así que $f = 0$ casi en todas partes. □