Función característica (repaso)

Objetivos. Repasar la definición de la función característica (la función indicadora) y sus propiedades principales.

Requisitos. Operaciones con conjuntos.

1 Definición (la función característica de un subconjunto de un conjunto)**.** Sea X un conjunto y sea $A \subseteq X$. Entonces la *función característica* (o *función indicadora*) de A con respecto a X se define mediante la regla:

$$\chi_{A,X} \colon X \to \mathbb{R}, \qquad \chi_{A,X}(t) = \begin{cases} 1, & t \in A; \\ 0, & t \in X \setminus A. \end{cases}$$

Por lo común, está claro que es X y en vez de $\chi_{A,X}$ se escribe simplemente χ_A.

2 Ejercicio (la función característica y operaciones con conjuntos)**.** Sean $A, B \subset X$. Exprese las funciones características de los conjuntos $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ a través de χ_A y χ_B.

3 Ejercicio (la partición de un conjunto y las funciones características)**.** Sea $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ una sucesión de subconjuntos de X y sea $B \subseteq X$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\chi_B = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{A_k}$;

(b) $(A_k)_{k=1}^{\infty}$ es una partición generalizada de B, esto es, $A_j \cap A_k = \varnothing$ si $j \neq k$ y $B = \displaystyle\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$.