Estructura de sucesiones crecientes de conjuntos

Objetivos. Estudiar la estructura de las sucesiones crecientes de conjuntos. Explicar cómo pasar a sucesiones disjuntas.

Requisitos. Familias monótonas de conjuntos, propiedades de operaciones con conjuntos, le principio de inducción y el principio del buen orden.

1 Observación (el conjunto de los números naturales es bien ordenado, repaso)**.** Se sabe que cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo. Es una de las formas del principio de inducción. Tarea adicional: usando solamente la inducción matemática demostrar que cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$ tiene un elemento mínimo.

`https://proofwiki.org/wiki/Equivalence_of_Well-Ordering_Principle_and_Induction`

2 Lema (sobre una sucesión creciente de conjuntos y los índices de pertenencia)**.** *Sean* $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión creciente de conjuntos,* $k \in \{1, 2, \ldots\}$ *y* $x \in A_k$*. Denotemos por* J *al conjunto de los índices* n *tales que* $x \in A_n$*:*

$$J \coloneqq \Big\{ n \in \{1, 2, \ldots\} \colon \; x \in A_n \Big\}.$$

Entonces:

1. $J \neq \varnothing$.
2. J *tiene un único elemento mínimo que denotemos por* p.
3. $p \leq k$.
4. $J = \mathbb{N}_p$*, donde* $\mathbb{N}_p \coloneqq \{j \in \mathbb{Z} \colon \; j \geq p\} = \{p, p+1, p+2, \ldots\}$.

Demostración. 1. Por la hipótesis, $k \in J$.

2. Como el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}$ es bien ordenado y J es un subconjunto no vacío de $\mathbb{N}$, el conjunto J tiene un único elemento mínimo. Lo denotemos por p.

3. Como $k \in J$ y p es el elemento mínimo de J, tenemos que $p \leq k$.

4. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \leq p$, entonces de la construcción de p sigue que $n \notin J$. Si $n \in \mathbb{N}$ y $n \geq p$, entonces $x \in A_p \subseteq A_n$, así que $n \in J$. □

El siguiente resultado nos permite pasar de una sucesión creciente de conjuntos a una sucesión disjunta que tiene la misma unión. Este resultado se usa para mostrar varias propiedades de medidas, en particular, la *continuidad por abajo* y luego la *propiedad subaditiva*.

3 Proposición (sobre una sucesión creciente de conjuntos y la sucesión de sus diferencias sucesivas). *Sea $(A_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos que empieza con el conjunto vació:*

$$\varnothing = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \ldots$$

Denotamos por $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ la sucesión de sus diferencias sucesivas:

$$\forall n \in \{1, 2, \ldots\} \qquad D_n \coloneqq A_n \setminus A_{n-1}.$$

Entonces:

1. *Los conjuntos D_n son disjuntos a pares.*
2. *Para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$, $\quad A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$.*
3. $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$.

Demostración. 1. Sean $p, q \in \{1, 2, \ldots\}$, $p < q$. Demostremos que $D_p \cap D_q = \varnothing$. Notemos que $p \leq q-1$ y por lo tanto $A_p \subseteq A_{q-1}$. De la definición de D_p sigue que $D_p \subseteq A_p \subseteq A_{q-1}$, y de la definición de D_q sigue que $D_q \cap A_{q-1} = \varnothing$.

2. Para todo $k \in \{1, \ldots, n\}$ tenemos que

$$D_k \subseteq A_k \subseteq A_n.$$

Por lo tanto

$$\bigcup_{k=1}^{n} D_k \subseteq A_n.$$

Para demostrar la contención inversa, supongamos que $x \in A_n$. Tenemos que encontrar un índice $p \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x \in D_p$. Definimos el conjunto de índices J como en el Lema:

$$J \coloneqq \Big\{ k \in \{1, 2, \ldots\} \colon \ x \in A_k \Big\}.$$

Denotemos por p al elemento mínimo de J:

$$p \coloneqq \min(J).$$

Como ya vimos en la demostración del Lema, p existe y $p \leq k$. De la construcción de p sigue que $x \in A_p$ y $x \notin A_{p-1}$, lo cual significa que $x \in D_p$.

3. Aplicamos el resultado del inciso 2 y propiedades de la unión. Por un lado, para todo $n \in \{1, 2, \ldots\}$ tenemos que

$$A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} D_j \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j,$$

así que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$$

Por otro lado, para todo $j \in \{1, 2, \ldots\}$ tenemos que

$$D_j \subseteq A_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

así que

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n. \qquad \square$$

Otra demostración. El inciso 2 del teorema anterior se puede demostrar de otra manera, por inducción matemática sobre n. Verifiquemos la base de inducción:

$$A_1 = A_1 \setminus \varnothing = A_1 \setminus A_0 = D_1.$$

Suponiendo que $A_n = \bigcup_{k=1}^{n} D_k$ (hipótesis de inducción), demostremos que $A_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} D_k$:

$$A_{n+1} = A_n \cup (A_{n+1} \setminus A_n) = A_n \cup D_{n+1} \overset{\text{H.I.}}{=\!=} \left(\bigcup_{k=1}^{n} D_k \right) \cup D_{n+1} = \bigcup_{k=1}^{n+1} D_k. \qquad \square$$

4 Proposición (pasar de una sucesión arbitraria de conjuntos a una sucesión creciente y a una sucesión disjunta)**.** *Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de conjuntos. Para todo $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$ pongamos*

$$B_k := \bigcup_{n=1}^{k} A_n,$$

y para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$ pongamos

$$D_k := B_k \setminus B_{k-1}.$$

Entonces:

1. *La sucesión $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ es creciente y $B_0 = \varnothing$.*
2. *La sucesión $(D_k)_{k=1}^{\infty}$ es disjunta.*
3. *Para todo $k \in \{1, 2, \ldots\}$,*
$$D_k = A_k \setminus B_{k-1}.$$
4. $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = \bigcup_{j=1}^{\infty} D_j.$