Funciones crecientes (repaso)

Objetivos. Repasar los criterios de las funciones crecientes: en términos de las diferencias divididas del primer orden y en términos de la derivada.

Requisitos. Derivada, teorema del valor medio.

1. Definición (función creciente). Sea $X \subset \mathbb{R}$. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ se llama *creciente* si

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \big(x_1 < x_2\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(f(x_1) \le f(x_2)\big).$$

2. Definición (función estrictamente creciente). Sea $X \subset \mathbb{R}$. Una función $f\colon X \to \mathbb{R}$ se llama *estrictamente creciente* si

$$\forall x_1, x_2 \in X \qquad \big(x_1 < x_2\big) \qquad \Longrightarrow \qquad \big(f(x_1) < f(x_2)\big).$$

Funciones crecientes y diferencias divididas del primer orden

3. Definición (diferencias divididas del primer orden de una función). Sean $X \subset \mathbb{R}$, $f\colon X \to \mathbb{R}$ y $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \ne x_2$. Entonces

$$\Delta_f(x_1, x_2) \coloneqq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Otra notación: $f[x_1, x_2]$.

4. Representación simétrica de las diferencias divididas del primer orden.

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)}{x_1 - x_2} + \frac{f(x_2)}{x_2 - x_1}.$$

5. Propiedad simétrica de las diferencias divididas del primer orden.

$$\Delta_f(x_1, x_2) = \Delta_f(x_2, x_1).$$

6. Criterio para que una función sea creciente, en términos de las diferencias divididas del primer orden. Sea $X \subset \mathbb{R}$ y sea $f\colon X \to \mathbb{R}$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es creciente.

(b) Para todos $x_1, x_2 \in X$ tales que $x_1 \ne x_2$,

$$\Delta_f(x_1, x_2) \ge 0.$$

7. Observación. La condición (b) del criterio es simétrica respecto a x_1 y x_2, y por eso a veces puede ser más cómoda que la definición en la cual se pide $x_1 < x_2$.

Funciones crecientes derivables

8. Definición de la derivada, en términos de las diferencias divididas del primer orden. Escriba la definición de la derivada $f'(x_0)$ usando la notación $\Delta_f(x_0, x)$.

9. Teorema del Valor Medio (Teorema de Lagrange), en términos de las diferencias divididas del primer orden. Escriba el enunciado del Teorema del Valor Medio usando la notación $\Delta_f(a, b)$.

10. Criterio para que una función sea creciente, en términos de su derivada. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, sea (a, b) su interior y sea $f\colon I \to \mathbb{R}$ una función continua en I y derivable en (a, b). Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) f es creciente.

(b) $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in (a, b)$.

Idea de demostración. Suponiendo (a) y aplicando la definición de la derivada obtenemos (b). Suponiendo (b) y aplicando el teorema del valor medio obtenemos (a). En ambas partes es cómodo usar las diferencias divididas del primer orden. $\square$