Integrales impropias de Lebesgue (un tema de análisis real)

Egor Maximenko,
con ayuda de Antonio Jimarez Escamilla y Abdiel Rolando Márquez Meza

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

30 de noviembre de 2021

Objetivos

- Definir el concepto de integral impropia, en el contexto de las integrales de Lebesgue.
- Establecer el criterio de Cauchy para la convergencia de integrales impropias.
- Definir el concepto de convergencia absoluta de una integral impropia.

Prerrequisitos

- El concepto de la integral de Lebesgue.
- El criterio de Cauchy de límite de una función.

Tabla de contenido

Definición de la integral impropia, el caso del extremo derecho

Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, con $a < b$, y sea $f \in \mathcal{M}((a, b), \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Supongamos que

$$\forall v \in (a, b) \qquad \int_{(a,v)} |f| < +\infty.$$

Entonces definimos

$$\boxed{\int_a^{\to b} f := \lim_{\substack{v \to b \\ v \in (a,b)}} \int_a^v f.}$$

Si este límite existe y es finito, entonces se dice que la integral impropia $\int_a^{\to b} f$ converge.

Definición de la integral impropia, el caso del extremo izquierdo

Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$, con $a < b$, y sea $f \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Supongamos que

$$\forall v \in (a,b) \qquad \int_{(v,b)} |f| < +\infty.$$

Entonces definimos

$$\boxed{\int\limits_{\to a}^{b} f := \lim_{\substack{v \to a \\ v \in (a,b)}} \int_v^b f.}$$

Si este límite existe y es finito, entonces se dice que la integral impropia $\int_{\to a}^{b} f$ converge.

Sobre las integrales impropias y el punto intermedio

Lema

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $-\infty \le a < b \le +\infty$. Suponga que

$$\forall u, v \in (a,b) \qquad \int_{[u,v]} |f| \, \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Sean $c_1, c_2 \in (a,b)$.

Entonces se cumplen las siguientes equivalencias.

1. $\displaystyle\int_{\to a}^{c_1} f$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_{\to a}^{c_2} f$ converge.
2. $\displaystyle\int_{c_1}^{\to b} f$ converge $\iff$ $\displaystyle\int_{c_2}^{\to b} f$ converge.

Demostración del lema

Demostremos la afirmación sobre $\int_{\to a}$.

Demostración del lema

Demostremos la afirmación sobre $\int_{\to a}$.

Consideremos el caso $c_1 < c_2$ (el caso $c_2 < c_1$ es similar).

Demostración del lema

Demostremos la afirmación sobre $\int_{\to a}$.

Consideremos el caso $c_1 < c_2$ (el caso $c_2 < c_1$ es similar).

Notamos que

$$\int_u^{c_2} f = \int_u^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f.$$

Demostración del lema

Demostremos la afirmación sobre $\int_{\to a}$.

Consideremos el caso $c_1 < c_2$ (el caso $c_2 < c_1$ es similar).

Notamos que

$$\int_u^{c_2} f = \int_u^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f.$$

Si $\displaystyle\int_{\to a}^{c_1}$ converge, entonces $\displaystyle\int_{\to a}^{c_2}$ converge, y viceversa.

Demostración del lema

Demostremos la afirmación sobre $\int_{\to a}$.

Consideremos el caso $c_1 < c_2$ (el caso $c_2 < c_1$ es similar).

Notamos que

$$\int_u^{c_2} f = \int_u^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f.$$

Si $\displaystyle\int_{\to a}^{c_1}$ converge, entonces $\displaystyle\int_{\to a}^{c_2}$ converge, y viceversa.

Además,

$$\int_{\to a}^{c_2} f = \int_{\to a}^{c_1} f + \int_{c_1}^{c_2} f.$$

Definición de la integral impropia, el caso de ambos extremos

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Supongamos que

$$\forall u,v \in (a,b) \quad \int_{[u,v]} |f| < +\infty,$$

y existe c en (a,b) tal que $\displaystyle\int_c^{\to b} f$ y $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f$ convergen.

Entonces definimos

$$\boxed{\int_{\to a}^{\to b} f := \int_{\to a}^{c} f + \int_c^{\to b} f.}$$

Definición de la integral impropia, el caso de ambos extremos

Sea $f \in \mathcal{M}((a,b),\mathcal{F},\mathbb{C})$, donde $-\infty \le a < b \le +\infty$.

Supongamos que

$$\forall u,v \in (a,b) \quad \int_{[u,v]} |f| < +\infty,$$

y existe c en (a,b) tal que $\displaystyle\int_c^{\to b} f$ y $\displaystyle\int_{\to a}^{c} f$ convergen.

Entonces definimos

$$\boxed{\int_{\to a}^{\to b} f := \int_{\to a}^{c} f + \int_c^{\to b} f.}$$

Por el lema anterior, la definición de $\displaystyle\int_{\to a}^{\to b} f$ no depende de la elección del punto c en (a,b).

Ejemplos: la integral de la función potencial

Ejercicio. Sea $p > 1$. Demostrar que la siguiente integral impropia converge.

$$\int_1^{\to +\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejemplos: la integral de la función potencial

Ejercicio. Sea $p > 1$. Demostrar que la siguiente integral impropia converge.

$$\int_1^{\to +\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejercicio. Sea $0 < p \leq 1$. Demostrar que la siguiente integral impropia diverge.

$$\int_1^{\to +\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejemplos: la integral de la función potencial

Ejercicio. Sea $0 < p < 1$. Demostrar que la siguiente integral impropia converge.

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejemplos: la integral de la función potencial

Ejercicio. Sea $0 < p < 1$. Demostrar que la siguiente integral impropia converge.

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejercicio. Sea $p \geq 1$. Demostrar que la siguiente integral impropia diverge.

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejemplos: la integral de la función potencial

Ejercicio. Sea $0 < p < 1$. Demostrar que la siguiente integral impropia converge.

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejercicio. Sea $p \geq 1$. Demostrar que la siguiente integral impropia diverge.

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Ejercicio. Analizar la convergencia de la siguiente integral impropia para cada p en $(0, +\infty)$.

$$\int_{\to 0}^{\to +\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p}.$$

Tabla de contenido

El criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función

Proposición

Sean:

- (X, τ) un espacio topológico,
- $M \subseteq X$,
- $a \in X$ un punto de acumulación de M,
- $\varphi \colon M \to \mathbb{C}$ una función.

Suponga además que existe una base local numerable de τ en a.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\lim_{x \to a} \varphi(x) = b$.

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists V \in \tau(a) \quad \forall x, y \in V \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

Un caso particular del criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función

Proposición

Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$ tales que $a < b$, y sea $\varphi\colon (a, b) \to \mathbb{C}$.

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) Existe L en $\mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x) = L$.

(b) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in (a, b) \quad \forall x, y \in (v, b) \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| < \varepsilon$.

El criterio de Cauchy para la convergencia de las integrales impropias

Proposición

Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$ tales que $a < b$, y sea $f \in \mathcal{M}((a,b), \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Suponga que

$$\forall v \in (a,b) \qquad \int_{(a,v)} |f| < +\infty.$$

Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ converge;

(b) $\displaystyle\lim_{\substack{x_1, x_2 \to b \\ x_1, x_2 \in (a,b)}} \int_{x_1}^{x_2} f = 0$, esto es, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists v \in (a,b) \quad \forall x_1, x_2 \in (v,b) \quad \left| \displaystyle\int_{x_1}^{x_2} f \right| < \varepsilon.$

Demostración

Definimos $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(x) := \int_a^x f.$$

Demostración

Definimos $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(x) := \int_a^x f.$$

Por el criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función, las siguientes condiciones son equivalentes.

Demostración

Definimos $\varphi\colon (a,b) \to \mathbb{C}$,

$$\varphi(x) := \int_a^x f.$$

Por el criterio de Cauchy para la existencia del límite de una función, las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) $\lim\limits_{x\to b} \varphi(x)$ existe y es finito,

(b) $\forall \epsilon > 0 \quad \exists v \in (a,b) \quad \forall x_1, x_2 \in (v,b) \qquad |\varphi(x_2) - \varphi(x_1)| < \varepsilon.$

Tabla de contenido

La convergencia absoluta de una integral impropia

Sean $a, b \in [-\infty, +\infty]$ con $a < b$, y sea $f \in \mathcal{M}((a, b), \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Supongamos que converge

$$\int_a^{\to b} |f|.$$

Entonces se dice que $\displaystyle\int_a^{\to b} f$ converge absolutamente.

Ejercicio. Demostrar que si $\displaystyle\int_a^{\to b} |f|$ converge, entonces $\displaystyle\int_a^{\to b}$ converge.

Sugerencia: aplicar el criterio de Cauchy.

Ejercicios (con la convergencia absoluta)

Ejercicio. Demostrar la convergencia de las integrales impropias

$$\int_1^{\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^{\to+\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicios (con la convergencia absoluta)

Ejercicio. Demostrar la convergencia de las integrales impropias

$$\int_1^{\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x, \qquad \int_1^{\to +\infty} \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Ejercicio. Demostrar la convergencia de la integral impropia

$$\int_{\to 0}^{1} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x.$$

Tabla de contenido

La convergencia de la integral de Dirichlet

Demostremos que converge la integral impropia

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Vamos a usar el criterio de Cauchy y la integración por partes.

La convergencia de la integral de Dirichlet

Demostremos que converge la integral impropia

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Vamos a usar el criterio de Cauchy y la integración por partes.

Denotemos por f a la función bajo la integral: Definimos $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

La convergencia de la integral de Dirichlet

Demostremos que converge la integral impropia

$$\int_0^{\to+\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Vamos a usar el criterio de Cauchy y la integración por partes.

Denotemos por f a la función bajo la integral: Definimos $f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}$,

$$f\colon (0,+\infty)\to\mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Recordemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

La convergencia de la integral de Dirichlet

Demostremos que converge la integral impropia

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Vamos a usar el criterio de Cauchy y la integración por partes.

Denotemos por f a la función bajo la integral: Definimos $f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}$,

$$f\colon (0,+\infty) \to \mathbb{R}, \qquad f(x) := \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}.$$

Recordemos que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$.

Por lo tanto, $\int_{(0,t)} |f| < +\infty$ para cada t en $(0,+\infty)$.

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Para cada s, t en $(0, +\infty)$ con $s < t$, pongamos

$$\varphi(s, t) := \int_{[u,v]} f = \int_u^v \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Para cada s, t en $(0, +\infty)$ con $s < t$, pongamos

$$\varphi(s, t) := \int_{[u,v]} f = \int_u^v \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Nuestro objetivo es mostrar que

$$\lim_{s,t\to+\infty} \varphi(s, t) = 0.$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s, t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \, \mathrm{d}x.$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u =$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u = \frac{1}{x},$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u = \frac{1}{x}, \qquad v' =$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u = \frac{1}{x}, \qquad v' = \operatorname{sen}(x),$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u = \frac{1}{x}, \qquad v' = \mathrm{sen}(x), \qquad u' =$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u = \frac{1}{x}, \qquad v' = \operatorname{sen}(x), \qquad u' = -\frac{1}{x^2}, \qquad v =$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u = \frac{1}{x}, \qquad v' = \operatorname{sen}(x), \qquad u' = -\frac{1}{x^2}, \qquad v = -\cos(x).$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t)=\int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u=\frac{1}{x},\qquad v'=\operatorname{sen}(x),\qquad u'=-\frac{1}{x^2},\qquad v=-\cos(x).$$

Luego

$$\varphi(s,t)=$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u = \frac{1}{x}, \qquad v' = \operatorname{sen}(x), \qquad u' = -\frac{1}{x^2}, \qquad v = -\cos(x).$$

Luego

$$\varphi(s,t) = -\left.\frac{\cos(x)}{x}\right|_s^t + \int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x =$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

$$\varphi(s,t) = \int_s^t \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

Integremos por partes:

$$u = \frac{1}{x}, \qquad v' = \operatorname{sen}(x), \qquad u' = -\frac{1}{x^2}, \qquad v = -\cos(x).$$

Luego

$$\varphi(s,t) = -\frac{\cos(x)}{x}\bigg|_s^t + \int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\cos(s)}{s} - \frac{\cos(t)}{t} + \int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Acotamos la última integral:

$$\left|\int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Acotamos la última integral:

$$\left|\int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_s^t \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x \leq$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Acotamos la última integral:

$$\left| \int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2} \, \mathrm{d}x \right| \leq \int_s^t \left| \frac{\cos(x)}{x^2} \right| \mathrm{d}x \leq \int_s^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} =$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Acotamos la última integral:

$$\left|\int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_s^t \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x \le \int_s^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_s^t =$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Acotamos la última integral:

$$\left|\int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_s^t \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x \le \int_s^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_s^t = \frac{1}{s} - \frac{1}{t}.$$

Obtenemos

$$\varphi(s,t) = \left|\frac{\cos(s)}{s} - \frac{\cos(t)}{t} + \int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Acotamos la última integral:

$$\left|\int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_s^t \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x \le \int_s^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_s^t = \frac{1}{s} - \frac{1}{t}.$$

Obtenemos

$$\varphi(s,t) = \left|\frac{\cos(s)}{s} - \frac{\cos(t)}{t} + \int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{s} - \frac{1}{t}$$

La convergencia de la integral de Dirichlet, continuación

Acotamos la última integral:

$$\left|\int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \int_s^t \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right|\,\mathrm{d}x \le \int_s^t \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = -\left.\frac{1}{x}\right|_s^t = \frac{1}{s} - \frac{1}{t}.$$

Obtenemos

$$\varphi(s,t) = \left|\frac{\cos(s)}{s} - \frac{\cos(t)}{t} + \int_s^t \frac{\cos(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x\right| \le \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \frac{1}{s} - \frac{1}{t} = \frac{2}{s}.$$

Obviamente,

$$\lim_{t,s\to+\infty} \varphi(s,t) = 0.$$

Otro ejemplo similar

Ejercicio. Demostrar la convergencia de la siguiente integral impropia.

$$\int_{1}^{\to +\infty} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

La integral de Dirichlet no converge absolutamente

Ejercicio. Demostrar que

$$\int_0^{\to +\infty} \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,\mathrm{d}x = +\infty.$$

Sugerencia 1. Demostrar la fórmula

$$(\operatorname{sen}(x))^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(2x).$$

Sugerencia 2. Para cada v en $(0, +\infty)$,

$$\int_1^v \frac{|\operatorname{sen}(x)|}{x}\,\mathrm{d}x \ge \int_1^v \frac{(\operatorname{sen}(x))^2}{x}\,\mathrm{d}x \ge \frac{1}{2}\int_1^v \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_1^v \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$