Operadores lineales acotados idempotentes en espacios normados

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de los operadores lineales acotados que tienen propiedad idempotente: $P^2 = P$.

Prerrequisitos. Operadores lineales acotados, la imagen y el núcleo de un operador lineal, subespacio cerrado de un espacio normado.

Propiedades algebraicas

Empecemos con algunas propiedades de algebraicas que no involucran la norma.

1 Proposición (el operador lineal idempotente complementario)**.** *Sean $\mathbb{F}$ un campo, V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $P\colon V \to V$ un operador lineal tal que $P^2 = P$. Definimos $Q\colon V \to V$ mediante la siguiente regla:*

$$Q \coloneqq I - P.$$

Entonces, Q también es un operador lineal y $Q^2 = Q$. Más aún,

$$P = I - Q, \qquad PQ = 0, \qquad QP = 0.$$

Demostración. Ejercicio. $\square$

2 Proposición (la imagen y el núcleo de un operador lineal idempotente)**.** *Sean $\mathbb{F}$ un campo, V un espacio vectorial sobre $\mathbb{F}$ y $P\colon V \to V$ un operador lineal tal que $P^2 = P$. Definimos Q como en la Proposición 1. Entonces, la imagen de P es el conjunto de los puntos inmovibles de P:*

$$\operatorname{im}(P) = \{v \in V\colon\ \ Pv = v\}. \tag{1}$$

Más aún,

$$\operatorname{im}(P) = \ker(Q), \qquad \ker(P) = \operatorname{im}(Q).$$

El espacio V es la suma directa de $\operatorname{im}(P)$ y $\ker(P)$:

$$V = \operatorname{im}(P) + \ker(P), \qquad \operatorname{im}(P) \cap \ker(P) = \{0_V\}.$$

Demostración. Demostremos la igualdad (1). Si $v \in \operatorname{im}(P)$, entonces existe u en V tal que $v = Pu$. Entonces, $Pv = P^2 u = Pu = v$.

Al revés, si $v \in V$ y $Pv = v$, entonces $v = Pv \in \operatorname{im}(P)$. Hemos demostrado (1).

La igualdad $Pv = v$ se puede escribir en la forma $(I - P)v = 0_V$, por eso obtenemos $\operatorname{im}(P) = \ker(Q)$.

Aplicamos la propiedad anterior al operador Q en lugar de P y obtenemos que $\operatorname{im}(Q) = \ker(P)$.

Demostremos que V es la suma de $\operatorname{im}(P)$ y $\ker(P)$. Sea $v \in V$. Entonces,

$$v = Pv + (I - P)v = Pv + Qv.$$

Aquí $Pv \in \operatorname{im}(P)$, $Qv \in \operatorname{im}(Q) = \ker(P)$.

Esta suma es directa. En efecto, si $v \in \operatorname{im}(P) \cap \ker(P)$. Entonces

$$v = Pv = 0_V. \qquad \square$$

Propiedades que involucran la norma o la topología

Ahora suponemos que V es un espacio normado complejo (o real) y P es un operador lineal acotado.

3 Proposición (sobre la imagen y el núcleo de un operador lineal acotado idempotente)**.** *Sea V un espacio normado complejo y sea $P \in \mathcal{B}(V)$ tal que $P^2 = P$. Pongamos $Q := I - P$. Entonces, $Q \in \mathcal{B}(V)$ y $Q^2 = Q$. Más aún,* $\operatorname{im}(P)$ *y* $\ker(P)$ *son subespacios cerrados de V.*

Demostración. Ejercicio. Notamos que

$$\ker(P) = P^{-1}[\{0_V\}], \qquad \operatorname{im}(P) = \ker(Q) = Q^{-1}[\{0_V\}]. \qquad \square$$

4 Proposición (sobre la norma de operador lineal acotado idempotente)**.** *Sea V un espacio normado complejo y sea $P \in \mathcal{B}(V)$ tal que $P^2 = P$ y $P \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$. Entonces, $\|P\| \geq 1$.*

Demostración. Como $P \neq 0_{\mathcal{B}(V)}$, tenemos que $\|P\| > 0$.

Usamos la propiedad idempotente y la propiedad submultiplicativa de la norma de los operadores lineales acotados,
$$\|P\| = \|P^2\| \le \|P\|^2.$$
Dividimos entre $\|P\|$ y obtenemos que $\|P\| \ge 1$. $\square$

5 Ejemplo. Sea $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\alpha \neq 0$. Definimos $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$,
$$A \coloneqq \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Es fácil ver que $A^2 = A$. Sea $V \coloneqq \mathbb{C}^2$. Consideramos V con la norma euclidiana. Denotemos por P el operador de multiplicación por A:
$$P\colon V \to V, \qquad P(v) \coloneqq Av.$$
Entonces, $P \in \mathcal{B}(V)$ y $P^2 = P$. Calcule $\operatorname{im}(P)$ y $\ker(P)$.