

Ideas de soluciones de algunos ejercicios
sobre integrales que dependen de parámetros
(un tema de análisis real)

Egor Maximenko

<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

2024-12-08

- 1 La derivada de la función Gamma
- 2 La transformada de Laplace de la función potencial
- 3 Una integral maravillosa
- 4 Una integral con exp y cos

Plan

- 1 La derivada de la función Gamma
- 2 La transformada de Laplace de la función potencial
- 3 Una integral maravillosa
- 4 Una integral con exp y cos

La derivada de la función Gamma

Ejercicio. La función $\Gamma: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ se define como

$$\Gamma(x) := \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Demostrar que

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln(t) e^{-t} dt.$$

Consideramos la función dentro de la integral y su derivada respecto al segundo argumento:

$$f(t, x) := e^{-t} t^{x-1}, \quad (D_2 f)(t, x) := e^{-t} t^{x-1} \ln(t).$$

Hay que justificar la aplicación de la regla de Leibniz.

Un camino malo

Consideramos f en el dominio $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$.

$$f(t, x) = e^{-t} t^{x-1}, \quad (D_2 f)(t, x) = e^{-t} t^{x-1} \ln(t).$$

Sea h la mínima función que acota f de manera uniforme respecto al segundo argumento:

$$h(t) := \sup_{x \in (0, +\infty)} |(D_2 f)(t, x)|.$$

Si $t > 1$, entonces $x \mapsto t^{x-1}$ es creciente, y

$$h(t) = \sup_{x \in (0, +\infty)} (e^{-t} t^{x-1} \ln(t)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-t} t^{x-1} \ln(t)) = +\infty.$$

Luego $h \notin L^1((0, +\infty))$.

Idea de un camino bueno

La derivabilidad es una propiedad local.

Es suficiente probar que el resultado se cumple en cualquier intervalo de la forma

$$(x_1, x_2), \quad \text{con} \quad 0 < x_1 < x_2 < +\infty,$$

porque estos intervalos cubren $(0, +\infty)$.

Si demostraremos que la fórmula

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1} \ln(t) e^{-t} dt$$

se cumple en cualquier intervalo de la forma (x_1, x_2) ,
entonces podremos concluir que se cumple en $(0, +\infty)$.

Idea de un camino bueno

Sean $x_1, x_2 > 0$, $x_1 < x_2$. Consideramos $f: (0, +\infty) \times (x_1, x_2) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(t, x) = e^{-t} t^{x-1}, \quad (D_2 f)(t, x) = e^{-t} t^{x-1} \ln(t).$$

Definimos $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(t) := \sup_{x \in (x_1, x_2)} |(D_2 f)(t, x)| = \begin{cases} e^{-t} t^{x_1-1} |\ln(t)|, & 0 < t < 1; \\ ???, & t \geq 1. \end{cases}$$

Entonces, obviamente, $|(D_2 f)(t, x)| \leq h(t)$ para $t > 0$, $x \in (x_1, x_2)$.

Idea de un camino bueno

Para $0 < t < 1$, $h(t) = e^{-t} t^{x_1-1} |\ln(t)|$. Demostremos que $\int_0^1 h(t) dt < +\infty$.

Pongamos $\alpha := \frac{x_1}{2}$ y encontramos $C > 0$ tal que

$$\forall t \in (0, 1) \quad |\ln(t)| \leq t^{-\alpha}.$$

Entonces

$$e^{-t} t^{x_1-1} |\ln(t)| \leq t^{2\alpha-1} t^{-\alpha} = \frac{1}{t^{1-\alpha}},$$

y

$$\int_0^1 h(t) dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^{1-\alpha}} < +\infty.$$

Falta calcular $h(t)$ para $t \geq 1$ y demostrar que $\int_1^{+\infty} h(t) dt < +\infty$.

Plan

- 1 La derivada de la función Gamma
- 2 La transformada de Laplace de la función potencial**
- 3 Una integral maravillosa
- 4 Una integral con exp y cos

La transformada de Laplace de la función potencial

Ejercicio. Sean $\lambda > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^k dx$$

usando la regla de Leibniz.

Inicio de la solución. Pongamos

$$f(x, \lambda) := e^{-\lambda x}, \quad \Phi(\lambda) := \int_0^{+\infty} f(x, \lambda) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx.$$

Esta integral se calcula fácilmente con el cambio de variable $t = \lambda x$.

$$f(x, \lambda) = e^{-\lambda x}, \quad (D_2^k f)(x, \lambda) = (-1)^k e^{-\lambda x} x^k.$$

Queremos demostrar que se puede aplicar la regla de Leibniz k veces:

$$\Phi^{(k)}(\lambda) = \int_0^{+\infty} (D_2^k f)(x, \lambda) dx.$$

Entonces la integral requerida se calculará fácilmente:

$$\int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} x^k dx = (-1)^k \int_0^{+\infty} (D_2^k f)(x, \lambda) dx = (-1)^k \Phi^{(k)}(\lambda) = ???.$$

Demostremos que la regla de Leibniz se puede aplicar k veces en cualquier intervalo de la forma $(\xi, +\infty)$, $\xi > 0$, porque los intervalos de esta forma cubren $(0, +\infty)$.

Sean $\xi > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Consideramos $f: (0, +\infty) \times (\xi, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, \lambda) := e^{-\lambda x}.$$

Definimos $h: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$h(x) := \sup_{\lambda > \xi} |(D_2^k f)(x, \lambda)| = \sup_{\lambda > \xi} (e^{-\lambda x} x^k) = e^{-\xi x} x^k.$$

Nos falta demostrar que $h \in L^1((0, +\infty))$.

$$h(x) = e^{-\xi x} x^k.$$

Se sabe que existe $C > 0$ tal que $t^k \leq C e^t$ para $t > 0$. Luego

$$x^k = \frac{2^k}{\xi^k} \left(\frac{\xi x}{2} \right)^k \leq \frac{2^k}{\xi^k} C e^{\frac{\xi x}{2}}.$$

De aquí es fácil ver que

$$\int_0^{+\infty} h(x) dx < +\infty.$$

Plan

- 1 La derivada de la función Gamma
- 2 La transformada de Laplace de la función potencial
- 3 Una integral maravillosa**
- 4 Una integral con exp y cos

Ejercicio. Calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2} dx.$$

Definimos $f: [0, +\infty) \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, \alpha) := \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}.$$

Definimos $g: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(\alpha) := \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) dx.$$

Mostrar que $g \in C([0, +\infty), \mathbb{R})$.

Probar que se puede aplicar la regla de Leibniz para $\alpha > 0$.

Calcular $g'(\alpha)$ para $\alpha > 0$. Calcular $g(0)$. Calcular explícitamente $g(\alpha)$.

Sugerencias

$$f(x, \alpha) := \frac{1 - e^{-\alpha x^2}}{x^2}, \quad g(\alpha) := \int_0^{+\infty} f(x, \alpha) \, dx.$$

Recordamos la fórmula para la integral de Poisson:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} \, dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

De aquí es fácil calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} (D_2 f)(x, \alpha) \, dx.$$

Sugerencias

Justificar la aplicación de la regla de Leibniz para α en $(\xi, +\infty)$, donde $\xi > 0$.

Los intervalos de esta forma cubren $(0, +\infty)$.

Falta demostrar que g es continua en $[0, +\infty)$.

Es suficiente demostrar que g es continua en intervalos de la forma $[0, \eta]$, $\eta > 0$.

$$u(x) := \sup_{\alpha \in [0, \eta]} f(x, \alpha) = \frac{1 - e^{-\eta x^2}}{x^2}.$$

Sugerencias

Falta demostrar que si $\eta > 0$, entonces

$$\int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-\eta x^2}}{x^2} dx < +\infty.$$

Sabemos que $e^t \geq 1 + t$ para cada t en \mathbb{R} .

Luego $1 - e^{-u} \leq u$ para cada u en \mathbb{R} .

Además, $1 - e^{-u} \leq 1$ para $u > 0$.

Acotamos la integral:

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-\eta x^2}}{x^2} dx \leq \int_0^1 \frac{\eta x^2}{x^2} dx = ???, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-\eta x^2}}{x^2} dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = ???.$$

Plan

- 1 La derivada de la función Gamma
- 2 La transformada de Laplace de la función potencial
- 3 Una integral maravillosa
- 4 Una integral con exp y cos

Ejercicio. Fijamos $a > 0$ y definimos $\Phi: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\Phi(b) := \int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) \, dx.$$

Establecer la relación

$$\Phi'(b) = -\frac{b}{2a} \Phi(b).$$

Demostrar que

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) \, dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

Justificar la regla de Leibniz en este ejemplo

$$f(x, b) := e^{-ax^2} \cos(bx), \quad (D_2 f)(x, b) = -x e^{-ax^2} \operatorname{sen}(bx).$$

$$|(D_2 f)(x, b)| \leq x e^{-ax^2}.$$

La siguiente integral se puede calcular con un cambio de variable:

$$\int_0^{+\infty} x e^{-ax^2} dx.$$

Resolver la ecuación diferencial

Después de aplicar la regla de Leibniz y una integración por partes, se obtiene

$$\Phi'(b) = -\frac{b}{2a}\Phi(b).$$

Además, es fácil calcular $\Phi(0)$ usando la fórmula para la integral de Poisson. Pongamos

$$\Lambda(b) := \ln(\Phi(b)).$$

Entonces

$$\Lambda'(b) = \frac{\Phi'(b)}{\Phi(b)} = -\frac{b}{2a}, \quad \Lambda(b) = \Lambda(0) - \frac{b^2}{4a} = \ln(\Phi(0)) - \frac{b^2}{4a}.$$

Despejamos $\Phi(b)$:

$$\Phi(b) = \exp(\Lambda(b)) = \Phi(0) e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$