Hipersubespacioes de espacios vectoriales

Objetivos. Estudiar el concepto de *hipersubespacios* de espacios vectoriales; demostrar la equivalencia de tres definiciones de hipersubespacios:

- en términos de espacios complementarios;
- en términos de espacios cocientes;
- en términos de funcionales lineales.

Prerrequisitos. Espacios vectoriales, subespacios, sumas directas de subespacios de espacios vectoriales, funcionales lineales, espacios cocientes.

1 Proposición (sobre la suma de un subespacio y un subespacio de dimensión 1)**.** *Sean V un espacio vectorial complejo, W un subespacio de V, $a \in V \setminus W$. Entonces:*

1) $W \cap (\mathbb{C}a) = \{0_V\}$;

2) para cada v en $W + \mathbb{C}a$, existe un único par (w, λ) en $W \times \mathbb{C}$ tal que

$$v = w + \lambda a.$$

En otras palabras, $W + \mathbb{C}a$ es la suma directa de W y $\mathbb{C}a$.

Demostración. 1. Supongamos $v \in W$ y $v \in \mathbb{C}a$. Luego existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $v = \lambda a$. Si $\lambda \neq 0$, entonces concluimos que

$$a = \frac{1}{\lambda} v \in W,$$

lo cual contradice a la suposición que $a \notin W$.

2. Supongamos que $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$,

$$w_1 + \lambda_1 a = w_2 + \lambda_2 a.$$

Entonces

$$\underbrace{w_1 - w_2}_{\in W} = \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)a}_{\in \mathbb{C}a}.$$

Por resultado del inciso 1, concluimos que $w_1 - w_2 = 0_V$ y $(\lambda_2 - \lambda_1)a = 0_V$. Como $a \notin W$, tenemos que $a \neq 0_V$. Luego $\lambda_1 = \lambda_2$ y $w_1 = w_2$. $\square$

2 Definición (codimensión de un subespacio vectorial)**.** Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V. Entonces la dimensión de V/W se llama la *codimensión* de W. En particular, si dice que W es de *codimensión finita*, si V/W es de dimensión finita.

3 Definición. Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V. Se dice que W es un *hipersubespacio* de V, si V/W es de dimensión 1.

4 Proposición (criterio de hipersubespacio)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un subespacio de V.*
Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) V/W es un espacio vectorial de dimensión 1.

(b) existe a en $V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que $\dim(V/W) = 1$. Elegimos $A \in V/W$ tal que $V/W = \ell(A)$. Elegimos $a \in A$. Entonces $A = a + W$.

Demostremos que $a \notin W$. Si $a \in W$, entonces $A = W = 0_{V/W}$ y $\dim(V/W) = 0$. Contradicción.

Demostremos que $V \subseteq W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Como $x + W \in V/W = \ell(A)$, existe λ en $\mathbb{C}$ tal que $x + W = \lambda a + W$. Esto implica que $x - \lambda a \in W$, $x \in W + \mathbb{C}a$.

(b)⇒(a). Supongamos que a en $V \setminus W$ y $V = W + \mathbb{C}a$.

Demostremos que el vector $a + W$ forma una base de V/W.

Como $a \notin W$, tenemos $a + W \neq W$, esto es, $a + W \neq 0_{V/W}$.

Sea $X \in V/W$. Elegimos $x \in X$. Entonces existen $w \in W$, $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que $x = w + \lambda a$. Luego $x \in \lambda a + W$, esto es, $X = \lambda a + W = \lambda(a + W)$. □

5 Observación. Como vimos en el ejercicio anterior, en la condición (b) de la proposición tenemos una suma directa.

Sabemos que si $f\colon V \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal, entonces $\ker(f)$ es un subespacio de V.

Obviamente,

$$f = 0_{V\to\mathbb{C}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ker(f) = V.$$

6 Proposición (los núcleos de funciones lineales no nulos son hipersubespacios)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal no nulo. Entonces* $\ker(f)$ *es un hipersubespacio en V.*

Demostración. Pongamos $W := \ker(f)$. Elegimos $a \in V$ tal que $f(a) \neq 0$. Entonces $a \notin W$. Demostremos que $V = W + \mathbb{C}a$. Sea $x \in V$. Pongamos

$$w := x - \frac{f(x)}{f(a)}\, a.$$

Entonces $f(w) = 0$, $w \in W$, $x = w + \frac{f(x)}{f(a)}\, a \in W + \mathbb{C}a$. $\square$

7 Proposición (los hipersubespacios son núcleos de funcionales lineales no nulos)**.** *Sea V un espacio vectorial complejo y sea W un hipersubespacio de V. Entonces existe un funcional lineal no nulo $f\colon V \to \mathbb{C}$ tal que* $\ker(f) = W$.

Idea de primera demostración. Sea $a \in V \setminus W$ tal que $V = W + \mathbb{C}a$. Vamos a definir $f\colon V \to \mathbb{C}$.

Dado x en V, existe un único par $(w, \lambda) \in W \times \mathbb{C}$ tal que $x = w + \lambda a$. Pongamos $f(x) := \lambda$.

Es fácil ver que f es lineal y que $\ker(f) = W$. $\square$

Idea de segunda demostración. La suposición $\dim(V/W) = 1$ implica que existe un isomorfismo lineal $g\colon V/W \to \mathbb{C}$. Sea $h\colon V \to V/W$ la proyección canónica:

$$h(x) := x + W \qquad (x \in V).$$

Entonces $f := g \circ h$ es un funcional lineal no nulo y $\ker(f) = W$. $\square$

8 Ejercicio. Completar las demostraciones.