Formas sesquilineales hermíticas

Objetivos. Definir formas sesquilineales hermítias. Demostrar que una forma sesquilineal f es hermítica si, y sólo si, los valores de su forma cuadrática q_f son reales.

Prerrequisitos. La identidad de polarización para las formas sesquilineales.

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo.

1 Definición. Una forma sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ se llama *hermítica*, si $f(b,a) = \overline{f(a,b)}$ para cualesquiera a, b en V.

2 Definición (la adjunta de una forma sesquilineal)**.** Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Definimos $f^*\colon V^2 \to \mathbb{C}$,

$$f^*(a,b) \coloneqq \overline{f(b,a)} \qquad (a, b \in V).$$

3 Ejercicio. Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Demostrar que f^* también es una forma sesquilineal.

4 Ejercicio. Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Mostrar que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $f(b,a) = \overline{f(a,b)}$ para cada a, b en V;

(b) $\overline{f(b,a)} = f(a,b)$ para cada a, b en V;

(c) $f^* = f$.

5 Ejercicio (ejemplo de forma sesquilineal hermítica)**.** Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Demostrar que la forma $f + f^*$ es hermítica.

6 Ejercicio (repaso: las formas cuadráticas son absolutamente homogéneas de orden 2)**.** Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal. Mostrar que para cada a en V y cada λ en $\mathbb{C}$

$$q_f(\lambda a) = |\lambda|^2\, q_f(a).$$

En particular, mostrar que $q_f(-a) = q_f(\mathrm{i}\, a) = q_f(-\mathrm{i}\, a) = q_f(a)$.

7 Proposición. *Sea* $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ *una forma sesquilineal. Entonces las siguientes dos condiciones son equivalentes:*

(a) f *es hermítica;*

(b) $q_f(u) \in \mathbb{R}$ *para cada* u *en* V*.*

Demostración. (a)⇒(b). Supongamos que f es hermítica. Entonces para cada u en V obtenemos

$$q_f(u) = f(u, u) = \overline{f(u, u)} = \overline{q_f(u)},$$

así que $q_f(u) \in \mathbb{R}$.

(b)⇒(a). Supongamos que $q_f(u) \in \mathbb{R}$ para cada u en V. Sean $a, b \in V$. Apliquemos la identidad de polarización:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\left(q_f(b + a) + \mathrm{i}\, q_f(b + \mathrm{i}\, a) - q_f(b - a) - \mathrm{i}\, q_f(b - \mathrm{i}\, a)\right).$$

Factorizamos i de la expresión $b + \mathrm{i}\, a$, -1 de la expresión $b - a$, $-\mathrm{i}$ de la expresión $b - \mathrm{i}\, a$:

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\Big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f\big(\mathrm{i}\,(a - \mathrm{i}\, b)\big) - q_f\big(-(a - b)\big) - \mathrm{i}\, q_f\big(-\mathrm{i}\,(a + \mathrm{i}\, b)\big)\Big).$$

Aplicamos la propiedad absolutamente homogénea de orden 2 (Ejercicio 6):

$$f(b, a) = \frac{1}{4}\big(q_f(a + b) + \mathrm{i}\, q_f(a - \mathrm{i}\, b) - q_f(a - b) - \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b)\big).$$

Conjugamos ambos lados de esta igualdad. Usamos la suposición que todos los valores de q_f son reales:

$$\overline{f(b, a)} = \frac{1}{4}\big(q_f(a + b) - \mathrm{i}\, q_f(a - \mathrm{i}\, b) - q_f(a - b) + \mathrm{i}\, q_f(a + \mathrm{i}\, b)\big).$$

Por la identidad de polarización, el lado derecho coincide con $f(a, b)$. Hemos demostrado que $f^* = f$. □