El núcleo de calor
(el núcleo de Gauss–Weierstrass)

Objetivos. Demostrar las propiedades principales del núcleo de calor.

Proposición 1 (el núcleo de calor, llamado también el núcleo de Gauss–Weierstrass, repaso)**.**

$$H_t(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2 t\xi^2}\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\ \mathrm{d}\xi = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\ \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4t}}\ .$$

Proposición 2 (el teorema de convolución, repaso)**.** *Sean* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$*. Entonces*

$$\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}.$$

Proposición 3 (el núcleo de calor es una solución de la ecuación de calor en la recta real)**.**

$$\frac{\partial H_t(x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 H_t(x)}{\partial x^2}.$$

Definición 4 (núcleo aproximativo)**.** Una familia de funciones $(K_t)_{t>0}$ en $L^1(\mathbb{R})$ se llama *núcleo aproximativo* cuando $t \to 0^+$, si satisface las siguientes propiedades:

- $\sup_{t>0} \|K_t\|_1 < +\infty$,
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K_t(x)\,\mathrm{d}x = 1$,
- $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} |K_t(x)|\,\mathrm{d}x = 0.$

Proposición 5. *El núcleo de calor es un núcleo aproximativo.*

Demostración. Notamos que $H_t(x) \geqslant 0$ y que

$$\|H_t\|_1 = \int_{\mathbb{R}} H_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y = 1.$$

Sea $\delta > 0$. Entonces con el cambio de variable $x = \sqrt{4t}\,y$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta,\delta)} H_t(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}\setminus(-\delta\sqrt{4t},\delta\sqrt{4t})} \mathrm{e}^{-y^2}\ \mathrm{d}y.$$

Como la función $y \mapsto \mathrm{e}^{-y^2}$ es integrable, la última expresión tiende a cero cuando t tiende a cero. □

Proposición 6 (reciprocidad y convolución). *Sean* $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ *y sea*

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}} g(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Entonces para cada x *en* $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)G(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi)g(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Demostración. Notamos que $G(y) = \widehat{g}(-y)$. Con el cambio de variable $z = -y$ obtenemos

$$\int_{\mathbb{R}} f(x-y)G(y)\,\mathrm{d}y = \int_{\mathbb{R}} f(x+z)\widehat{g}(z)\,\mathrm{d}z.$$

Pongamos $h_x(z) \coloneqq f(x+z)$. Entonces $\widehat{h_x}(\xi) = \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, \widehat{f}(\xi)$. Por la fórmula de reciprocidad,

$$\int_{\mathbb{R}} h_x(z)\widehat{g}(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\mathbb{R}} \widehat{h_x}(\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,x\xi}\, \widehat{f}(\xi)g(\xi)\,\mathrm{d}\xi. \qquad \square$$

Proposición 7 (fórmula para la convolución con el núcleo de calor). *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R})$. *Entonces*

$$(H_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-4\pi^2\xi^2 t}\, \widehat{f}(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi.$$

Demostración. Recordamos que

$$H_t(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(\xi)\, \mathrm{e}^{2\pi\,\mathrm{i}\,\xi x}\, \mathrm{d}\xi,$$

donde

$$G_t(\xi) = \mathrm{e}^{-4\pi^2\xi^2 t}.$$

Aplicando la Proposición 6 obtenemos el resultado. $\square$