El grupo de los operadores invertibles es abierto (un tema de análisis funcional)

Egor Maximenko
https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

3 de mayo de 2022

Objetivo

Sea X un espacio de Banach. Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad.

Objetivo

Sea X un espacio de Banach. Ya sabemos que $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach con identidad.

Denotemos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ el conjunto de los operadores invertibles en X:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ T \in \mathcal{B}(X) : \quad \exists S \in \mathcal{B}(X) \quad TS = ST = I \Big\}.$$

Vamos a demostrar que $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es abierto y la operación $T \mapsto T^{-1}$ es continua.

Prerrequisitos

- El álgebra de Banach $\mathcal{B}(X)$ de los operadores lineales acotados en el espacio de Banach X.
- La serie de Neumann.

El álgebra de los operadores lineales acotados (repaso)

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach.

Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ hay un elemento neutro e y $\|e\| = 1$.

Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

El álgebra de los operadores lineales acotados (repaso)

Definición (álgebra de Banach con identidad)

Sea $\mathcal{A}$ un álgebra compleja asociativa y al mismo tiempo un espacio de Banach.

Supongamos que la norma es submultiplicativa:

$$\forall a, b \in \mathcal{A} \qquad \|ab\| \leq \|a\| \, \|b\|.$$

Además, supongamos que $\mathcal{A}$ hay un elemento neutro e y $\|e\| = 1$.

Entonces se dice que $\mathcal{A}$ es un álgebra de Banach con identidad.

Proposición

Sea X un espacio de Banach. Entonces $\mathcal{B}(X)$ es un álgebra de Banach.

Operadores invertibles (repaso)

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Operadores invertibles (repaso)

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \Big\}.$$

Operadores invertibles (repaso)

Un operador $S \in \mathcal{B}(X)$ se llama invertible si existe $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $ST = I$ y $TS = I$.

Denotamos por $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ al conjunto de los elementos invertibles del álgebra $\mathcal{B}(X)$:

$$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) := \Big\{ S \in \mathcal{B}(X) \colon \quad \exists T \in \mathcal{B}(X) \quad ST = I \quad \wedge \quad TS = I \Big\}.$$

Proposición

$\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es un grupo.

La operación inv (repaso)

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) =$

La operación inv (repaso)

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.

La operación inv (repaso)

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\operatorname{inv}(ST) =$

La operación inv (repaso)

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(ST) = \operatorname{inv}(T)\operatorname{inv}(S)$.

La operación inv (repaso)

Definimos

$$\operatorname{inv}\colon\ \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \operatorname{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\operatorname{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(ST) = \operatorname{inv}(T)\operatorname{inv}(S)$.
3. Para cualquier S en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \operatorname{inv}(\operatorname{inv}(S)) =$

La operación inv (repaso)

Definimos

$$\mathrm{inv}\colon \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)) \to \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad \mathrm{inv}(S) := S^{-1}.$$

Proposición (propiedades de inv)

1. $\mathrm{inv}(I) = I$.
2. Para cualesquiera S, T en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \mathrm{inv}(ST) = \mathrm{inv}(T)\,\mathrm{inv}(S)$.
3. Para cualquier S en $\operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, $\quad \mathrm{inv}(\mathrm{inv}(S)) = S$.

La serie de Neumann (repaso)

Teorema

Sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que $\|T\| < 1$.

Entonces $I - T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X))$, la serie $\sum_{k=0}^{\infty} T^k$ converge, y

$$(I - T)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} T^k.$$

Ejercicio.

Supongamos que $T \in \mathcal{B}(X)$, $\|T\| < 1$. Demostrar que

$$\|(I - T)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|T\|}, \qquad \|(I - T)^{-1} - I\| \leq \frac{\|T\|}{1 - \|T\|}.$$

El conjunto $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es abierto

Proposición

Sea $S \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ y sea $T \in \mathcal{B}(X)$ tal que

$$\|T - S\| < \frac{1}{\|S^{-1}\|}.$$

Entonces $T \in \mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$,

$$\|T^{-1}\| \leq \frac{\|S^{-1}\|}{1 - \|S^{-1}\| \, \|T - S\|}, \qquad \|T^{-1} - S^{-1}\| < \frac{\|T - S\| \, \|S^{-1}\|^2}{1 - \|T - S\| \, \|S^{-1}\|}.$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T =$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) =$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) = S(I - S^{-1}(S - T)).$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) = S(I - S^{-1}(S - T)).$$

Notamos que

$$\|S^{-1}(S - T)\| \leq$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) = S(I - S^{-1}(S - T)).$$

Notamos que

$$\|S^{-1}(S - T)\| \leq \|S^{-1}\| \, \|T - S\|$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) = S(I - S^{-1}(S - T)).$$

Notamos que

$$\|S^{-1}(S - T)\| \leq \|S^{-1}\| \, \|T - S\| < 1.$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) = S(I - S^{-1}(S - T)).$$

Notamos que

$$\|S^{-1}(S - T)\| \leq \|S^{-1}\| \, \|T - S\| < 1.$$

Por lo tanto,

$$I - S^{-1}(S - T) \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)).$$

Demostración

Escribimos T en la forma

$$T = S + (T - S) = S(I - S^{-1}(S - T)).$$

Notamos que

$$\|S^{-1}(S - T)\| \leq \|S^{-1}\| \, \|T - S\| < 1.$$

Por lo tanto,

$$I - S^{-1}(S - T) \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)), \qquad T \in \operatorname{Inv}(\mathcal{B}(X)).$$

Más aún,

$$T^{-1} = (I - S^{-1}(S - T))^{-1} \, S^{-1}.$$

De aquí obtenemos las cotas enunciadas.

Proposición

El conjunto $\mathrm{Inv}(\mathcal{B}(X))$ es abierto en $\mathcal{B}(X)$. La función inv es continua.

Se sigue de la proposición anterior.