Teorema de Banach sobre el punto fijo para funciones contractivas (un tema del curso "Álgebra Lineal Numérica")

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

1 de junio de 2021

Objetivos:

- conocer el concepto de funciones contractivas;
- conocer la desigualdad fundamental para funciones contractivas (la desigualdad de Richard Palais);
- demostrar el teorema de Banach sobre el punto fijo.

Prerrequisitos:

- funciones Lipschitz continuas en espacios métricos;
- sucesiones convergentes y sucesiones de Cauchy;
- espacios métricos completos.

Plan

1. Funciones Lipschitz continuas (repaso)
2. Iteraciones de una función (repaso)
3. Funciones contractivas

Espacios métricos (repaso)

Sea X un conjunto y sea $d\colon X \times X \to [0, +\infty)$ una función.
La funcion d se llama métrica o distancia, si tiene las siguientes propiedades.

1. La desigualdad del triángulo: $\forall x, y, z \in X \qquad d(x, y) \le d(x, z) + d(z, y)$.
2. La propiedad simétrica: $\forall x, y \in X \qquad d(x, y) = d(y, x)$.
3. Para cada x en X, $\quad d(x, x) = 0$.
4. La propiedad de separación: $\forall x, y \in X \quad \big(d(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0\big)$.

Espacios métricos completos (repaso)

Sea (X, d) un espacio métrico.

Una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X se llama de Cauchy (o convergente en si), si

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall m, n \geq k \qquad d(x_m, x_n) < \varepsilon.$$

El espacio métrico (X, d) se llama completo si cada sucesión de Cauchy tiene un límite en X.

La métrica inducida por una norma (repaso)

Sea $(V, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Definimos $d\colon V \times V \to [0, +\infty)$,

$$d(x, y) := \|x - y\|.$$

Entonces d es una métrica.

Los espacios normados completos se llaman espacios de Banach.

Ejemplos: $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$,
$\ell^p(\mathbb{N})$ con la norma $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p \leq +\infty$,
$C_b(X)$ (funciones continuas acotadas).

Funciones Lipschitz continuas (repaso)

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $L > 0$.

Una función $f : X \to Y$ se llama Lipschitz continua con coeficiente L si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b).$$

Funciones Lipschitz continuas (repaso)

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $L > 0$.
Una función $f\colon X \to Y$ se llama Lipschitz continua con coeficiente L si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) \leq L\, d_X(a, b).$$

Ejercicio. Demostrar que si f es Lipschitz continua, entonces f es uniformemente continua.

Funciones Lipschitz continuas (repaso)

Sean (X, d_X), (Y, d_Y) espacios métricos y sea $L > 0$.
Una función $f\colon X \to Y$ se llama Lipschitz continua con coeficiente L si

$$\forall a, b \in X \qquad d_Y(f(a), f(b)) \le L\, d_X(a, b).$$

Ejercicio. Demostrar que si f es Lipschitz continua, entonces f es uniformemente continua.

Ejercicio. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continuamente derivable en $[a, b]$. Sea

$$L := \sup_{x \in [a,b]} |f'(x)|.$$

Entonces f es Lipschitz continua con coeficiente L.

Recordatorio: la norma matricial asociada a una norma vectorial

Sea N una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Denotemos por $N_{\mathrm{matr}}(A)$ la norma matricial de A asociada a la norma vectorial N:

$$N_{\mathrm{matr}}(A) := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ N(x) \leq 1}} N(Ax) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}} \frac{N(Ax)}{N(x)}.$$

Recordatorio: la norma matricial asociada a una norma vectorial

Sea N una norma en $\mathbb{R}^n$ y sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Denotemos por $N_{\mathrm{matr}}(A)$ la norma matricial de A asociada a la norma vectorial N:

$$N_{\mathrm{matr}}(A) := \sup_{\substack{x \in \mathbb{R}^n \\ N(x) \leq 1}} N(Ax) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0_n\}} \frac{N(Ax)}{N(x)}.$$

De la definición del supremo se sigue que

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \qquad N(Ax) \leq N_{\mathrm{matr}}(A)\, N(x).$$

Ejemplo: transformaciones lineales Lipschitz continuas

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Consideramos la transformación lineal

$$T_A \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad T_A(x) := Ax.$$

Ejemplo: transformaciones lineales Lipschitz continuas

Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Consideramos la transformación lineal

$$T_A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad T_A(x) := Ax.$$

Esta función es Lipschitz continua con coeficiente $N_{\text{matr}}(A)$:

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \qquad N(Ax - Ay) \le N_{\text{matr}}(A)\, N(x - y).$$

Plan

1 Funciones Lipschitz continuas (repaso)

2 Iteraciones de una función (repaso)

3 Funciones contractivas

Iteraciones de una función cuyo codominio coincide con el dominio

Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$. Definimos

$$f^{[1]} := f, \quad f^{[2]} := f \circ f, \quad f^{[3]} := f \circ f \circ f, \quad f^{[4]} := f \circ f \circ f \circ f, \quad \ldots$$

Formalmente, definimos $f^{[n]}\colon X \to X$ de manera recursiva:

$$f^{[0]} := \mathrm{id}_X, \qquad f^{[n+1]} := f^{[n]} \circ f.$$

Aquí id_X es la función identidad del conjunto X:

$$\mathrm{id}_X\colon X \to X, \qquad \mathrm{id}_X(x) := x \qquad (x \in X).$$

Ejemplos

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$, entonces

$$\cos^{[4]}(x) = \cos(\cos(\cos(\cos(x)))).$$

Ejemplos

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\cos(x)$, entonces

$$\cos^{[4]}(x)=\cos(\cos(\cos(\cos(x)))).$$

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$, entonces

$$f^{[3]}(x)=$$

Ejemplos

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$, entonces

$$\cos^{[4]}(x) = \cos(\cos(\cos(\cos(x)))).$$

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, entonces

$$f^{[3]}(x) = x^8.$$

Propiedades de las iteraciones de una función (repaso)

Proposición

Sea $f\colon X \to X$. Entonces

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0 \qquad f^{[n+m]} = f^{[m]} \circ f^{[n]} = f^{[n]} \circ f^{[m]}.$$

En particular,

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}.$$

Propiedades de las iteraciones de una función (repaso)

Proposición

Sea $f\colon X \to X$. Entonces

$$\forall m, n \in \mathbb{N}_0 \qquad f^{[n+m]} = f^{[m]} \circ f^{[n]} = f^{[n]} \circ f^{[m]}.$$

En particular,

$$\forall n \in \mathbb{N}_0 \qquad f^{[n+1]} = f \circ f^{[n]}.$$

Idea de demostración: por inducción, usando la propiedad asociativa de la composición.

La órbita de un punto bajo una función

Sea $f\colon X \to X$ y sea $x_0 \in X$. Definimos $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de manera recursiva:

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

La órbita de un punto bajo una función

Sea $f\colon X \to X$ y sea $x_0 \in X$. Definimos $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de manera recursiva:

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

En otras palabras,

$$x_1 = f(x_0), \qquad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \qquad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \qquad \ldots .$$

La órbita de un punto bajo una función

Sea $f\colon X \to X$ y sea $x_0 \in X$. Definimos $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de manera recursiva:

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

En otras palabras,

$$x_1 = f(x_0), \qquad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \qquad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \qquad \ldots.$$

Entonces x_n se puede escribir como

$$x_n =$$

La órbita de un punto bajo una función

Sea $f\colon X \to X$ y sea $x_0 \in X$. Definimos $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ de manera recursiva:

$$x_{n+1} := f(x_n).$$

En otras palabras,

$$x_1 = f(x_0), \qquad x_2 = f(x_1) = f(f(x_0)), \qquad x_3 = f(x_2) = f(f(f(x_0))), \qquad \ldots.$$

Entonces x_n se puede escribir como

$$x_n = f^{[n]}(x_0).$$

Las iteraciones de una función Lipschitz continua

Proposición

Sea X un espacio métrico

y sea $f : X \to X$ una función Lipschitz continua con coeficiente L.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ la función $f^{[n]}$ es Lipschitz continua con coeficiente L^n.

Las iteraciones de una función Lipschitz continua

Proposición

Sea X un espacio métrico

y sea $f: X \to X$ una función Lipschitz continua con coeficiente L.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ la función $f^{[n]}$ es Lipschitz continua con coeficiente L^n.

Demostración. Por inducción.

Las iteraciones de una función Lipschitz continua

Proposición

Sea X un espacio métrico

y sea $f\colon X \to X$ una función Lipschitz continua con coeficiente L.

Entonces para cada n en $\mathbb{N}$ la función $f^{[n]}$ es Lipschitz continua con coeficiente L^n.

Demostración. Por inducción. Si se cumple para n, entonces

$$d(f^{[n+1]}(a), f^{[n+1]}(b)) = d(f(f^{[n]}(a)), f(f^{[n]}(b))) \le L\, d(f^{[n]}(a), f^{[n]}(b))$$

$$\overset{\text{H.I.}}{\le} L\, L^n\, d(a, b) = L^{n+1} d(a, b).$$

Puntos fijos de una función

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $p \in X$. Se dice que p es un punto fijo de f si

$$f(p) = p.$$

Puntos fijos de una función

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $p \in X$. Se dice que p es un punto fijo de f si

$$f(p) = p.$$

La función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, tiene los siguientes puntos fijos:

Puntos fijos de una función

Sea X un conjunto, sea $f: X \to X$ y sea $p \in X$. Se dice que p es un punto fijo de f si

$$f(p) = p.$$

La función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$, tiene los siguientes puntos fijos:

$$0, \quad 1.$$

Si existe un límite de las iteraciones, entonces es un punto fijo

Proposición

Sea X un espacio métrico, sea $f : X \to X$ una función continua, sea $x_0 \in X$. Definimos una sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ en X,

$$x_n := f^{[n]}(x_0).$$

Entonces palabras, $x_{n+1} := f(x_n)$ para cada n. Supongamos que $p \in X$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = p$. Entonces

$$f(p) = p.$$

Demostración

Pasamos al límite en la igualdad

$$f(x_n) = x_{n+1}.$$

Demostración

Pasamos al límite en la igualdad

$$f(x_n) = x_{n+1}.$$

Como f es continua, $f(x_n) \to f(p)$.

Demostración

Pasamos al límite en la igualdad

$$f(x_n) = x_{n+1}.$$

Como f es continua, $f(x_n) \to f(p)$.
Por otro lado, como $x_n \to p$, se muestra fácilmente que $x_{n+1} \to p$.

Demostración

Pasamos al límite en la igualdad

$$f(x_n) = x_{n+1}.$$

Como f es continua, $f(x_n) \to f(p)$.
Por otro lado, como $x_n \to p$, se muestra fácilmente que $x_{n+1} \to p$.
Entonces $f(p) = p$.

Plan

1. Funciones Lipschitz continuas (repaso)
2. Iteraciones de una función (repaso)
3. Funciones contractivas

Funciones contractivas

Sea (X, d) un espacio métrico.

Una función $f\colon X \to X$ se llama contractiva si existe un L en $[0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

Funciones contractivas

Sea (X, d) un espacio métrico.

Una función $f : X \to X$ se llama contractiva si existe un L en $[0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

Otros términos equivalentes: función contractante, contracción.

Funciones contractivas

Sea (X, d) un espacio métrico.

Una función $f: X \to X$ se llama contractiva si existe un L en $[0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

Otros términos equivalentes: función contractante, contracción.

En otras palabras, una función $X \to X$ es contractiva,
si es Lipschitz continua con un coeficiente de Lipschitz estrictamente menor que 1.

Funciones cortas y funciones estrictamente cortas

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$.

Se dice que f es corta o no-expansiva si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq d(a, b).$$

Funciones cortas y funciones estrictamente cortas

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f: X \to X$.

Se dice que f es corta o no-expansiva si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq d(a, b).$$

Se dice que f es estrictamente corta si

$$\forall a, b \in X \qquad \Big(a \neq b \quad \Longrightarrow \quad d(f(a), f(b)) < d(a, b)\Big).$$

Funciones cortas y funciones estrictamente cortas

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to X$.

Se dice que f es corta o no-expansiva si

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \le d(a, b).$$

Se dice que f es estrictamente corta si

$$\forall a, b \in X \qquad \Big(a \ne b \quad \Longrightarrow \quad d(f(a), f(b)) < d(a, b)\Big).$$

Obviamente, cada función contractiva es estrictamente corta.

Función contractiva vs función estrictamente corta

Dada $f\colon X \to X$, consideremos el siguiente conjunto numérico de cocientes:

$$Q_f := \left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} : \quad a, b \in X, \ a \neq b \right\}.$$

Función contractiva vs función estrictamente corta

Dada $f\colon X \to X$, consideremos el siguiente conjunto numérico de cocientes:

$$Q_f := \left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \colon \quad a, b \in X, \ a \neq b \right\}.$$

En términos del conjunto Q_f,

$$f \text{ es estrictamente corta} \qquad \Longleftrightarrow$$

Función contractiva vs función estrictamente corta

Dada $f\colon X \to X$, consideremos el siguiente conjunto numérico de cocientes:

$$Q_f := \left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} : \quad a, b \in X,\ a \neq b \right\}.$$

En términos del conjunto Q_f,

$$f \text{ es estrictamente corta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q_f \subseteq [0, 1);$$

$$f \text{ es contractiva} \qquad \Longleftrightarrow$$

Función contractiva vs función estrictamente corta

Dada $f\colon X \to X$, consideremos el siguiente conjunto numérico de cocientes:

$$Q_f := \left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a,b)} \colon \quad a, b \in X,\ \ a \neq b \right\}.$$

En términos del conjunto Q_f,

$$f \text{ es estrictamente corta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q_f \subseteq [0,1);$$

$$f \text{ es contractiva} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup(Q_f) < 1.$$

Función contractiva vs función estrictamente corta

Dada $f\colon X \to X$, consideremos el siguiente conjunto numérico de cocientes:

$$Q_f := \left\{ \frac{d_Y(f(a), f(b))}{d_X(a, b)} \colon \quad a, b \in X, \ a \neq b \right\}.$$

En términos del conjunto Q_f,

$$f \text{ es estrictamente corta} \qquad \Longleftrightarrow \qquad Q_f \subseteq [0, 1);$$

$$f \text{ es contractiva} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sup(Q_f) < 1.$$

Por ejemplo, si $Q_f = [0, 1)$, entonces se cumple la primera condición, pero no se cumple la segunda.

Ejemplo de una función estrictamente corta que no es contractiva

Consideramos $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x)$.

Ejemplo de una función estrictamente corta que no es contractiva

Consideramos $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x)$.

Ejercicio. Demostrar que f es estrictamente corta.

Aplicar el teorema del valor medio y la fórmula

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} < 1 \qquad (x > 0).$$

Ejemplo de una función estrictamente corta que no es contractiva

Consideramos $f\colon [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{arc\,tg}(x)$.

Ejercicio. Demostrar que f es estrictamente corta.

Aplicar el teorema del valor medio y la fórmula

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} < 1 \qquad (x > 0).$$

Ejercicio. Demostrar que f no es contractiva. Mostrar que

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1, \qquad \sup_{\substack{a,b\in\mathbb{R}\\ a\neq b}} \frac{|f(a)-f(b)|}{a-b} = 1.$$

La desigualdad fundamental para funciones contractivas

(fundamental contraction inequality)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico

y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con un coeficiente L, $L \in [0, 1)$.

Entonces para cualesquiera a, b en X

$$d(a, b) \le \frac{1}{1-L}\Big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\Big).$$

La desigualdad fundamental para funciones contractivas

(fundamental contraction inequality)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico

y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con un coeficiente L, $L \in [0, 1)$.

Entonces para cualesquiera a, b en X

$$d(a, b) \leq \frac{1}{1 - L}\Big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\Big).$$

Richard S. Palais (2007):

A simple proof of the Banach contraction principle.

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a, b) \leq$$

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), b).$$

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), b).$$

Aplicamos la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a,b) \leq d(a,f(a)) + d(f(a),f(b)) + d(f(b),b).$$

Aplicamos la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

$$d(a,b) \leq$$

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a, b) \le d(a, f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), b).$$

Aplicamos la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

$$d(a, b) \le d(a, f(a)) + Ld(a, b) + d(b, f(b)).$$

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), b).$$

Aplicamos la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + Ld(a, b) + d(b, f(b)).$$

Pasamos el sumando $Ld(a, b)$ al lado izquierdo:

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), b).$$

Aplicamos la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + Ld(a, b) + d(b, f(b)).$$

Pasamos el sumando $Ld(a, b)$ al lado izquierdo:

$$(1 - L)d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(b, f(b)).$$

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), b).$$

Aplicamos la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + Ld(a, b) + d(b, f(b)).$$

Pasamos el sumando $Ld(a, b)$ al lado izquierdo:

$$(1 - L)d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(b, f(b)).$$

Por la hipótesis, $L < 1$, así que $1 - L > 0$.

Demostración

Sean $a, b \in X$. Aplicamos la desigualdad del triángulo:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(f(a), f(b)) + d(f(b), b).$$

Aplicamos la suposición que f es contractiva con coeficiente L:

$$d(a, b) \leq d(a, f(a)) + Ld(a, b) + d(b, f(b)).$$

Pasamos el sumando $Ld(a, b)$ al lado izquierdo:

$$(1 - L)d(a, b) \leq d(a, f(a)) + d(b, f(b)).$$

Por la hipótesis, $L < 1$, así que $1 - L > 0$. Dividimos ambos lados entre $1 - L$.

Unicidad del punto fijo de funciones contractivas

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva.

Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$.

Entonces $a = b$.

Unicidad del punto fijo de funciones contractivas

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f: X \to X$ una función contractiva.

Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$.

Entonces $a = b$.

Demostración. Aplicamos la desigualdad fundamental:

$$d(a, b) \leq$$

Unicidad del punto fijo de funciones contractivas

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to X$ una función contractiva.

Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$.

Entonces $a = b$.

Demostración. Aplicamos la desigualdad fundamental:

$$d(a, b) \leq \frac{1}{1 - L}\Big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\Big)$$

Unicidad del punto fijo de funciones contractivas

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico y sea $f : X \to X$ una función contractiva.
Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$.
Entonces $a = b$.

Demostración. Aplicamos la desigualdad fundamental:

$$d(a, b) \le \frac{1}{1 - L}\Big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\Big) = 0.$$

La órbita de un punto bajo una función contractiva es de Cauchy

Proposición

Sea X un espacio métrico, sea $f : X \to X$ una función contractiva y sea $x_0 \in X$. Definimos $(x_n)_{n=0}^{\infty}$,

$$x_n := f^{[n]}(x_0).$$

Entonces la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy.

Demostración basada en la desigualdad fundamental

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-L}\Big(d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_{n+1})\Big).$$

Demostración basada en la desigualdad fundamental

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-L}\Big(d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_{n+1})\Big).$$

Notamos que

$$d(x_m, x_{m+1}) = d(f^{[m]}(x_0), f^{[m]}(x_1))) \leq$$

Demostración basada en la desigualdad fundamental

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-L}\Big(d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_{n+1})\Big).$$

Notamos que

$$d(x_m, x_{m+1}) = d(f^{[m]}(x_0), f^{[m]}(x_1))) \leq L^m d(x_0, x_1).$$

De manera similar, $d(x_n, x_{n+1}) \leq$

Demostración basada en la desigualdad fundamental

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$,

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{1}{1-L}\Big(d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_{n+1})\Big).$$

Notamos que

$$d(x_m, x_{m+1}) = d(f^{[m]}(x_0), f^{[m]}(x_1))) \leq L^m d(x_0, x_1).$$

De manera similar, $d(x_n, x_{n+1}) \leq L^n d(x_0, x_1)$. Por eso

$$d(x_m, x_n) \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1-L}(L^m + L^n).$$

Cuando $m, n \to \infty$, tenemos $L^m + L^n \to 0$.

Idea de la demostración clásica

Notamos que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f^{[n]}(x_0), f^{[n]}(x_1)) \leq$$

Idea de la demostración clásica

Notamos que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f^{[n]}(x_0), f^{[n]}(x_1)) \leq L^n d(x_0, x_1).$$

Idea de la demostración clásica

Notamos que

$$d(x_n, x_{n+1}) = d(f^{[n]}(x_0), f^{[n]}(x_1)) \leq L^n d(x_0, x_1).$$

Si $n < m$, entonces por la desigualdad del triángulo

$$d(x_n, x_m) \leq \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \leq d(x_0, x_1) \sum_{j=n}^{m-1} L^j \leq \frac{d(x_0, x_1)}{1 - L} L^n.$$

La última expresión tiende a cero, cuando n tiende a infinito.

Teorema de Banach sobre el punto fijo de la función contractiva

Teorema

Sea (X, d) *un espacio métrico completo,* $X \neq \emptyset$*,*
y sea $f\colon X \to X$ *una función contractiva con coeficiente* $L \in [0, 1)$*. Entonces:*

I. *La función* f *tiene un único punto fijo; lo denotemos por* p*.*

II. *Si* $x_0 \in X$ *y la sucesión* $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ *está definida mediante la regla recursiva*

$$x_n = f(x_{n-1}),$$

entonces $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = p$*, y para cada* n *en* $\mathbb{N}$

$$d(x_n, p) \leq \frac{d(x_0, f(x_0))}{1 - L} L^n.$$

Demostración

Sale fácilmente de los lemas anteriores.

Demostración

Sale fácilmente de los lemas anteriores.

Mostremos la última desigualdad.
Aplicamos la desigualdad fundamental a los puntos x_n y p:

$$d(x_n, p) \leq$$

Demostración

Sale fácilmente de los lemas anteriores.

Mostremos la última desigualdad.

Aplicamos la desigualdad fundamental a los puntos x_n y p:

$$d(x_n, p) \leq \frac{1}{1-L}\Big(d(x_n, x_{n+1}) + d(p, f(p))\Big) \leq$$

Demostración

Sale fácilmente de los lemas anteriores.

Mostremos la última desigualdad.

Aplicamos la desigualdad fundamental a los puntos x_n y p:

$$d(x_n, p) \leq \frac{1}{1-L}\Big(d(x_n, x_{n+1}) + d(p, f(p))\Big) \leq \frac{d(x_0, f(x_0))}{1-L}\, L^n.$$

Aplicaciones

- El teorema de la función implícita (en cálculo).
- El teorema de la función inversa (en cálculo).
- Construcción de algunas clases de fractales.
- Demostración de la convergencia en el método de Newton.
- La existencia y unicidad de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales (el teorema de Picard–Lindelöf theorem).
- Demostración de la convergencia de varios otros algoritmos iterativos, incluso en álgebra lineal numérica.
- Una forma de demostrar la convergencia de la serie de von Neumann.

Corolario sobre una función cuya potencia es contractiva

Sea (X, d) un espacio métrico completo, $X \neq \emptyset$, sea $f : X \to X$ y sea $N \in \mathbb{N}$.
Supongamos que $f^{[N]}$ es contractiva con un coeficiente L en $[0, 1)$.

Entonces f tiene un único punto fijo p,
y para cada x_0 en X la sucesión $(f^{[n]}(x_0))_{n=0}^{\infty}$ converge a p.

Demostración: ejercicio.

Programación

```
def f1(x):
    return (x + 3.0 / x) / 2.0

def fixed_point(f, x0, eps, maxsteps):
    x = x0; er = 2 * eps; steps = 0
    while (er >= eps) and (steps < maxsteps):
        xprev = x; x = f(x)
        er = abs(x - xprev); steps += 1
    return x

print(fixed_point(f1, 3.0, 1e-15, 100))
```