El teorema del punto fijo de Banach para funciones contractivas (un tema de análisis)

Egor Maximenko,

https://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

22 de septiembre de 2022

Plan

Objetivo: demostrar el teorema del punto fijo de Banach.

Prerrequisitos

- Espacios métricos completos.
- Funciones contractivas.
- La desigualdad fundamental de Palais para funciones contractivas.
- Iteraciones de una función.
- El límite de una sucesión desplazada.

Algunas aplicaciones del teorema del punto fijo de Banach

- Solución de varias ecuaciones no lineales.
- El teorema de la función implícita.
- El método de Newton.
- Invertibilidad de operadores lineales, la serie de von Neumann.
- El teorema de Picard y otros teoremas sobre ecuaciones diferenciales.

Plan

Definición de función contractiva (repaso)

Sea (X, d) un espacio métrico.

Una función $f: X \to X$ se llama contractiva, si es de Lipschitz con un coeficiente < 1.

Definición de función contractiva (repaso)

Sea (X, d) un espacio métrico.

Una función $f\colon X \to X$ se llama contractiva, si es de Lipschitz con un coeficiente < 1.

En otras palabras, $f\colon X \to X$ se llama contractiva, si existe $L \in [0, 1)$ tal que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

La desigualdad fundamental de Palais para funciones contractivas (repaso)

Proposición

Sean (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ contractiva con coeficiente L, $L \in [0, 1)$.

Entonces para cada $a, b \in X$

$$d(a, b) \leq$$

La desigualdad fundamental de Palais para funciones contractivas (repaso)

Proposición

Sean (X, d) un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ contractiva con coeficiente L, $L \in [0, 1)$.

Entonces para cada $a, b \in X$

$$d(a, b) \leq \frac{1}{1 - L}\Big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\Big).$$

Iteraciones de una función (repaso)

Sea X un conjunto y sea $f\colon X \to X$.

Se define la sucesión de funciones $(f^{[k]})_{k=0}^{\infty}$, tales que $f^{[k]}\colon X \to X$, mediante la condición inicial

$$f^{[0]} := \mathrm{id}_X$$

y la siguiente regla recursiva:

$$f^{[k+1]} := f^{[k]} \circ f.$$

Iteraciones de una función de Lipschitz (repaso)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $f\colon X \to X$ y sea $L \geq 0$ tales que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$

$$\forall a, b \in X \qquad d(f^{[k]}(a), f^{[k]}(b)) \leq$$

Iteraciones de una función de Lipschitz (repaso)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $f\colon X \to X$ y sea $L \geq 0$ tales que

$$\forall a, b \in X \qquad d(f(a), f(b)) \leq L\, d(a, b).$$

Entonces para cada k en $\mathbb{N}$

$$\forall a, b \in X \qquad d(f^{[k]}(a), f^{[k]}(b)) \leq L^k\, d(a, b).$$

Iteraciones de una función aplicadas a un punto (repaso)

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ de manera inductiva:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f\big(t_k\big)\Big).$$

Iteraciones de una función aplicadas a un punto (repaso)

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ de manera inductiva:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f\big(t_k\big)\Big).$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$

$$t_n =$$

Iteraciones de una función aplicadas a un punto (repaso)

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ de manera inductiva:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$

$$t_n = f^{[n]}(a).$$

Iteraciones de una función aplicadas a un punto (repaso)

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ de manera inductiva:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$

$$t_n = f^{[n]}(a).$$

Más aún, para cada m, n en $\mathbb{N}_0$

$$f^{[m]}(t_n) =$$

Iteraciones de una función aplicadas a un punto (repaso)

Proposición

Sea X un conjunto, sea $f\colon X \to X$ y sea $a \in X$.

Definimos $(t_k)_{k=0}^{\infty}$ de manera inductiva:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

Entonces para cada n en $\mathbb{N}_0$

$$t_n = f^{[n]}(a).$$

Más aún, para cada m, n en $\mathbb{N}_0$

$$f^{[m]}(t_n) = t_{m+n}.$$

El límite de una sucesión desplazada (repaso)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $u \in X$ y sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} t_k = u.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} t_{k+1} = u.$$

El límite de una sucesión desplazada (repaso)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $u \in X$ y sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} t_k = u.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} t_{k+1} = u.$$

Demostración: por definición.

El límite de una sucesión desplazada (repaso)

Proposición

Sea (X, d) un espacio métrico, sea $u \in X$ y sea $(t_k)_{k\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} t_k = u.$$

Entonces

$$\lim_{k\to\infty} t_{k+1} = u.$$

Demostración: por definición.

Otra demostración: usar la proposición sobre la subsucesión de una sucesión convergente.

Plan

Teorema de Banach sobre el punto fijo para funciones contractivas

Teorema

Sea (X, d) un espacio métrico completo no vacío
y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente L, $L \in [0, 1)$.

Entonces existe un único punto p en X tal que $f(p) = p$.

Unicidad

Sean $p, q \in X$ tales que

$$f(p) = p, \qquad f(q) = q.$$

Unicidad

Sean $p, q \in X$ tales que

$$f(p) = p, \qquad f(q) = q.$$

Entonces por la desigualdad fundamental

$$d(p, q) \leq$$

Unicidad

Sean $p, q \in X$ tales que

$$f(p) = p, \qquad f(q) = q.$$

Entonces por la desigualdad fundamental

$$d(p, q) \leq \frac{1}{1 - L}\Big(d(p, f(p)) + d(q, f(q))\Big) \leq$$

Unicidad

Sean $p, q \in X$ tales que

$$f(p) = p, \qquad f(q) = q.$$

Entonces por la desigualdad fundamental

$$d(p, q) \leq \frac{1}{1 - L}\Big(d(p, f(p)) + d(q, f(q))\Big) \leq 0.$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, t_k

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k =$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k)$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) =$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a))$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) =$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a)$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a) =$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a) = f^{[k]}(f(a)).$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a) = f^{[k]}(f(a)).$$

Por eso

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a) = f^{[k]}(f(a)).$$

Por eso

$$d(t_k, f(t_k))$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a) = f^{[k]}(f(a)).$$

Por eso

$$d(t_k, f(t_k)) =$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a) = f^{[k]}(f(a)).$$

Por eso

$$d(t_k, f(t_k)) = d\big(f^{[k]}(a), f^{[k]}(f(a))\big)$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a) = f^{[k]}(f(a)).$$

Por eso

$$d(t_k, f(t_k)) = d\big(f^{[k]}(a), f^{[k]}(f(a))\big) \leq$$

Existencia: construcción de una sucesión

Sea $a \in X$. Definimos $(t_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ por inducción:

$$t_0 := a, \qquad \Big(\forall k \in \mathbb{N}_0 \qquad t_{k+1} := f(t_k)\Big).$$

En otras palabras, $t_k = f^{[k]}(a)$.

Notemos que

$$f(t_k) = f(f^{[k]}(a)) = f^{[k+1]}(a) = f^{[k]}(f(a)).$$

Por eso

$$d(t_k, f(t_k)) = d\big(f^{[k]}(a), f^{[k]}(f(a))\big) \le L^k\, d(a, f(a)).$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$d(t_m, t_n)$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$d(t_m, t_n) \leq$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$d(t_m, t_n) \;\leq\; \frac{1}{1-L}\Big(d(t_m, f(t_m)) + d(t_n, f(t_n))\Big)$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$\begin{aligned} d(t_m, t_n) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_m, f(t_m)) + d(t_n, f(t_n))\Big) \\ &\leq \end{aligned}$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
d(t_m, t_n) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_m, f(t_m)) + d(t_n, f(t_n))\Big) \\
&\leq \frac{1}{1-L}\Big(L^m d(a, f(a)) + L^n d(a, f(a))\Big)
\end{aligned}
$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$
\begin{aligned}
d(t_m, t_n) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_m, f(t_m)) + d(t_n, f(t_n))\Big) \\
&\leq \frac{1}{1-L}\Big(L^m d(a, f(a)) + L^n d(a, f(a))\Big) \\
&=
\end{aligned}
$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$\begin{aligned} d(t_m, t_n) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_m, f(t_m)) + d(t_n, f(t_n))\Big) \\ &\leq \frac{1}{1-L}\Big(L^m d(a, f(a)) + L^n d(a, f(a))\Big) \\ &= \frac{d(a, f(a))}{1-L}\Big(L^m + L^n\Big). \end{aligned}$$

$$p = \lim_{k\to\infty} t_k.$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$\begin{aligned} d(t_m, t_n) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_m, f(t_m)) + d(t_n, f(t_n))\Big) \\ &\leq \frac{1}{1-L}\Big(L^m d(a, f(a)) + L^n d(a, f(a))\Big) \\ &= \frac{d(a, f(a))}{1-L}\Big(L^m + L^n\Big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión es de Cauchy.

$$p = \lim_{k\to\infty} t_k.$$

Demostración: la sucesión es de Cauchy

Para cada m, n en $\mathbb{N}_0$ tenemos

$$\begin{aligned} d(t_m, t_n) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_m, f(t_m)) + d(t_n, f(t_n))\Big) \\ &\leq \frac{1}{1-L}\Big(L^m d(a, f(a)) + L^n d(a, f(a))\Big) \\ &= \frac{d(a, f(a))}{1-L}\Big(L^m + L^n\Big). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la sucesión es de Cauchy.

Denotemos por p su límite:

$$p = \lim_{k\to\infty} t_k.$$

Demostración: el límite es el punto fijo

Por la definición,

$$f(t_n) = t_{n+1}.$$

Demostración: el límite es el punto fijo

Por la definición,

$$f(t_n) = t_{n+1}.$$

Pasamos al límite:

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) = \lim_{n \to \infty} t_{n+1}.$$

Demostración: el límite es el punto fijo

Por la definición,

$$f(t_n) = t_{n+1}.$$

Pasamos al límite:

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} t_{n+1}.$$

En el lado izquierdo usamos el hecho que f es continua.

En el lado derecho la sucesión desplazada tiene el mismo límite que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Demostración: el límite es el punto fijo

Por la definición,

$$f(t_n) = t_{n+1}.$$

Pasamos al límite:

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} t_{n+1}.$$

En el lado izquierdo usamos el hecho que f es continua.

En el lado derecho la sucesión desplazada tiene el mismo límite que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$f\left(\lim_{n\to\infty} t_n\right) = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

Demostración: el límite es el punto fijo

Por la definición,

$$f(t_n) = t_{n+1}.$$

Pasamos al límite:

$$\lim_{n\to\infty} f(t_n) = \lim_{n\to\infty} t_{n+1}.$$

En el lado izquierdo usamos el hecho que f es continua.

En el lado derecho la sucesión desplazada tiene el mismo límite que $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$$f\left(\lim_{n\to\infty} t_n\right) = \lim_{n\to\infty} t_n.$$

$$f(p) = p.$$

Una cota superior para estimar la rapidez de la convergencia

$$d(t_k, p)$$

Una cota superior para estimar la rapidez de la convergencia

$$d(t_k, p) \ \leq$$

Una cota superior para estimar la rapidez de la convergencia

$$d(t_k, p) \; \leq \; \frac{1}{1-L}\Big(d(t_k, f(t_k)) + d(p, f(p))\Big)$$

Una cota superior para estimar la rapidez de la convergencia

$$\begin{aligned} d(t_k, p) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_k, f(t_k)) + d(p, f(p))\Big) \\ &\leq \end{aligned}$$

Una cota superior para estimar la rapidez de la convergencia

$$
\begin{aligned}
d(t_k, p) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_k, f(t_k)) + d(p, f(p))\Big) \\
&\leq \frac{1}{1-L}\Big(L^k d(a, f(a)) + 0\Big).
\end{aligned}
$$

Una cota superior para estimar la rapidez de la convergencia

$$\begin{aligned} d(t_k, p) &\leq \frac{1}{1-L}\Big(d(t_k, f(t_k)) + d(p, f(p))\Big) \\ &\leq \frac{1}{1-L}\Big(L^k d(a, f(a)) + 0\Big). \end{aligned}$$

Hemos mostrado que

Una cota superior para estimar la rapidez de la convergencia

$$\begin{aligned} d(t_k, p) &\le \frac{1}{1-L}\Big(d(t_k, f(t_k)) + d(p, f(p))\Big) \\ &\le \frac{1}{1-L}\Big(L^k d(a, f(a)) + 0\Big). \end{aligned}$$

Hemos mostrado que

$$d(t_k, p) \le \frac{L^k}{1-L}\, d(a, f(a)).$$

Ejemplo

Sea $f\colon [0,1] \to [0,1]$,

$$f(x) := \cos(x).$$

Demostrar que $f([0,1]) \subseteq [0,1]$.

Demostrar que

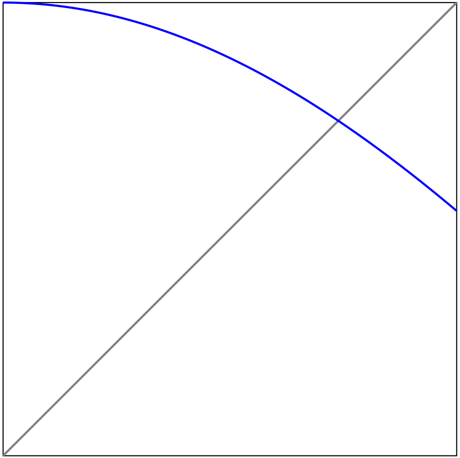
$$\sup_{x \in (0,1)} |f'(x)| < 1.$$

Demostrar que f es contractiva.

Ejemplo

$$f\colon [0,1] \to [0,1],$$

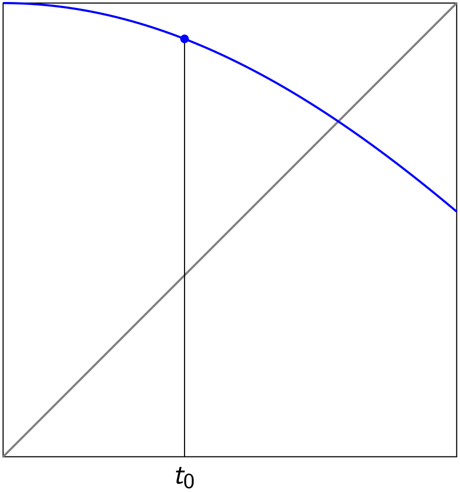
$$f(x) = \cos(x).$$



Ejemplo

$f : [0, 1] \to [0, 1],$

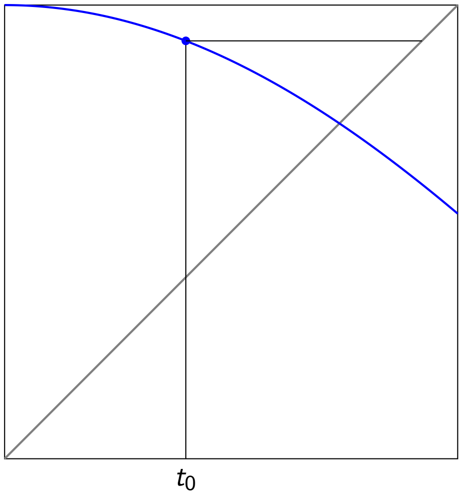
$f(x) = \cos(x).$



Ejemplo

$$f : [0,1] \to [0,1],$$

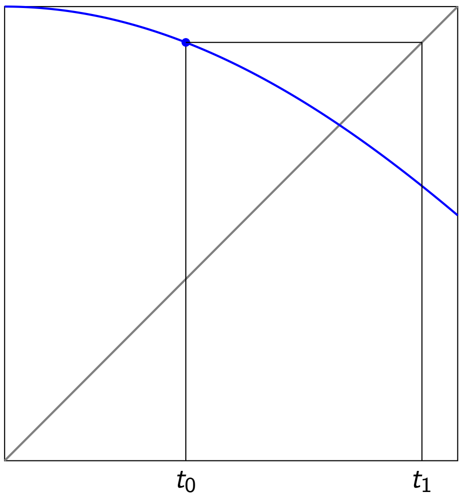
$$f(x) = \cos(x).$$



Ejemplo

$f : [0,1] \to [0,1]$,

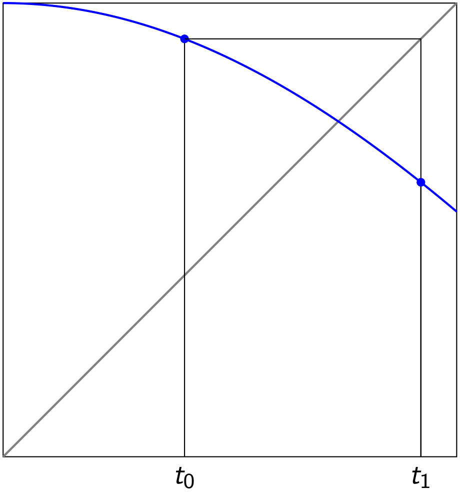
$f(x) = \cos(x)$.



Ejemplo

$$f\colon [0,1] \to [0,1],$$

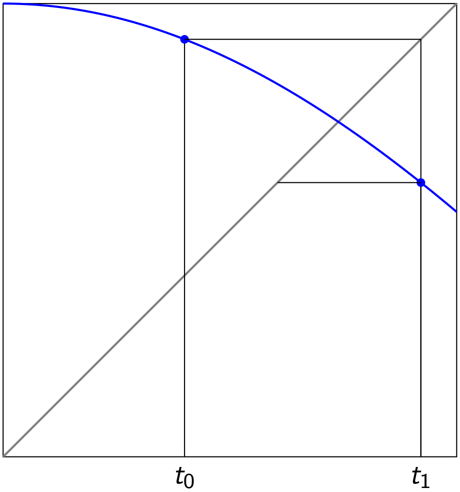
$$f(x) = \cos(x).$$



Ejemplo

$f : [0, 1] \to [0, 1]$,

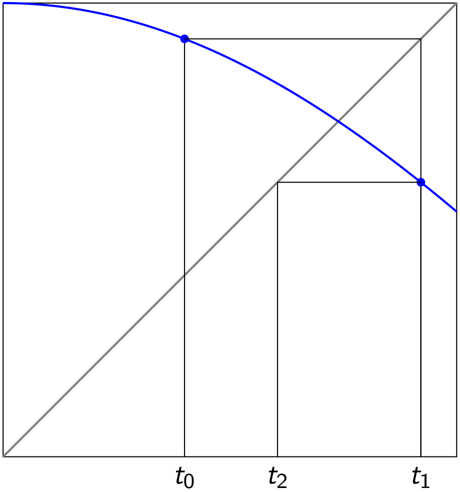
$f(x) = \cos(x)$.



Ejemplo

$$f : [0,1] \to [0,1],$$

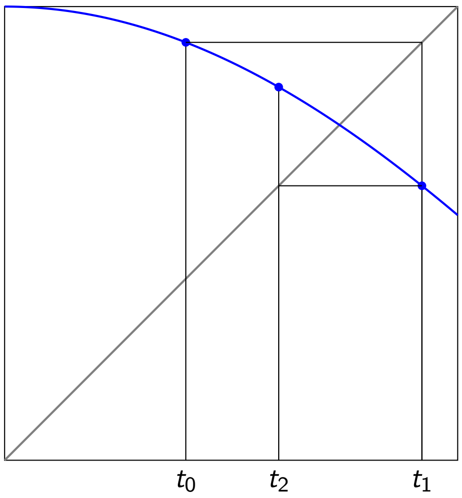
$$f(x) = \cos(x).$$



Ejemplo

$$f\colon [0,1] \to [0,1],$$

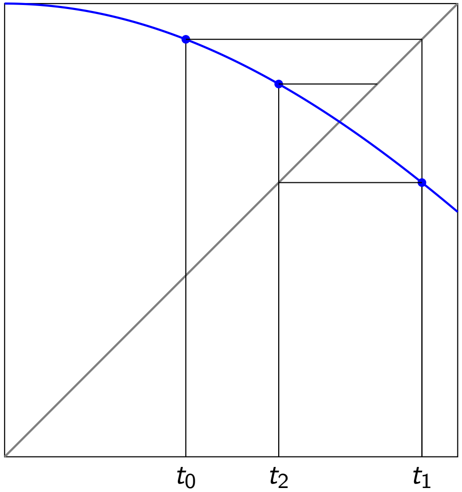
$$f(x) = \cos(x).$$



Ejemplo

$$f : [0, 1] \to [0, 1],$$

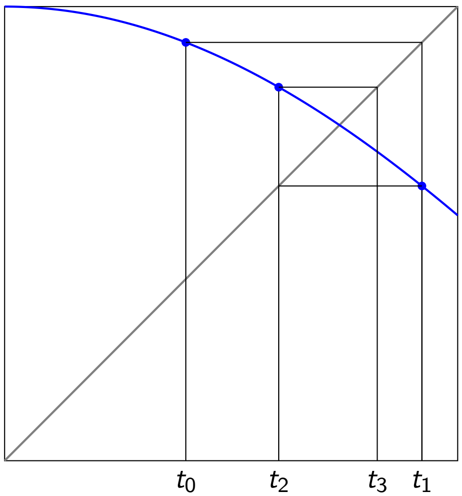
$$f(x) = \cos(x).$$



Ejemplo

$$f : [0,1] \to [0,1],$$

$$f(x) = \cos(x).$$



Algoritmo

```
def fixed_point_method(f, a, tol, max_steps):
    x = a
    er = 2 * tol
    steps = 0
    while (steps < max_steps) and (er >= tol):
        xprev = x
        x = f(xprev)
        er = abs(x - xprev)
        steps += 1
    return (steps, x)

print(fixed_point_method(cos, 0.4, 1e-5, 100))
```

Plan

Calcular el número de pasos suficiente para alcanzar cierta precisión

Ejercicio.

Supongamos las condiciones del teorema del punto fijo.

Calcular el número de pasos suficiente para alcanzar cierta precisión

Ejercicio.

Supongamos las condiciones del teorema del punto fijo.

Supongamos que $a \in X$. Definimos p y $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ como en la demostración.

Calcular el número de pasos suficiente para alcanzar cierta precisión

Ejercicio.

Supongamos las condiciones del teorema del punto fijo.

Supongamos que $a \in X$. Definimos p y $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ como en la demostración.

Además, sea $s \in \mathbb{N}$.

Calcular el número de pasos suficiente para alcanzar cierta precisión

Ejercicio.

Supongamos las condiciones del teorema del punto fijo.

Supongamos que $a \in X$. Definimos p y $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ como en la demostración.

Además, sea $s \in \mathbb{N}$.

Encontrar n en $\mathbb{N}$ tal que

$$d(t_n, p) \leq 2^{-s}.$$

Calcular el número de pasos suficiente para alcanzar cierta precisión

Ejercicio.

Supongamos las condiciones del teorema del punto fijo.

Supongamos que $a \in X$. Definimos p y $(t_n)_{n=0}^{\infty}$ como en la demostración.

Además, sea $s \in \mathbb{N}$.

Encontrar n en $\mathbb{N}$ tal que

$$d(t_n, p) \leq 2^{-s}.$$

Sugerencia. Usar la desigualdad

$$d(t_k, p) \leq \frac{L^k}{1 - L}\, d(a, f(a)).$$

Una justificación del algoritmo babilónico para calcular raíces cuadradas

Ejercicio. Sea $a > 1$.

$$f(x) := \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

Encontrar un conjunto X tal que la función $f\colon X \to X$ sea contractiva.

Una justificación del método de Newton

Ejercicio. Sea $g \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ y sea $p \in \mathbb{R}$ tal que $g(p) = 0$.

Supongamos que $A > 0$, $g'(x) \geq A$ para cada x, $B > 0$ y $|g''(x)| \leq B$ para cada x.

Dado $\delta > 0$, definimos $X_\delta = [p - \delta, p + \delta]$,

$$f(x) \coloneqq x - \frac{g(x)}{g'(x)}.$$

Encontrar $\delta > 0$ tal que $f \colon X_\delta \to X_\delta$ sea contractiva.

El punto fijo de la función cuya iteración es contractiva

Ejercicio. Sean (X, d) un espacio métrico completo no vacío.

Sean $g\colon X \to X, \quad m \in \mathbb{N}$.

Supongamos que $g^{[m]}$ es contractiva.

Demostrar que g tiene un único punto fijo.

Sugerencia: un camino falso es intentar demostrar que g es contractiva.
En realidad, es posible que g no sea contractiva.