# Teorema del punto fijo para funciones contractivas

**Objetivos.** Demostrar el teorema del punto fijo de Banach para funciones contractivas.

**Prerrequisitos.** Función contractiva, iteraciones de una función, la desigualdad fundamental para funciones contractivas.

**1 Proposición** (repaso: desigualdad fundamental de Palais para funciones contractivas)**.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con un coeficiente $L$, $L \in [0, 1)$. Entonces para cualesquiera $a, b$ en $X$*

$$d(a, b) \le \frac{1}{1 - L}\big(d(a, f(a)) + d(b, f(b))\big). \tag{1}$$

**2 Proposición** (unicidad del punto fijo de funciones contractivas)**.** *Sea $(X, d)$ un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva. Supongamos que $a, b \in X$, $f(a) = a$ y $f(b) = b$. Entonces $a = b$.*

*Demostración.* Aplicamos (1) a los puntos dados $a$ y $b$. El lado derecho se anula, por eso concluimos que $d(a, b) = 0$ y $a = b$. □

**3 Proposición** (iteraciones de funciones contractivas son contractivas)**.** *Sea $X$ un espacio métrico y sea $f\colon X \to X$ una función contractiva con coeficiente $L$, $L \in [0, 1)$. Entonces para cada $n$ en $\mathbb{N}_1$ la función $f^{[n]}$ es contractiva con coeficiente $L^n$.*

*Demostración.* Se demuestra fácilmente por inducción. □

**4 Proposición** (el límite de una sucesión desplazada, repaso)**.** *Sea $X$ un espacio métrico y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión en $X$. Supongamos que $p \in X$ y*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = p.$$

*Definimos $(y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ mediante la regla $y_n := x_{n+1}$. Entonces*

$$\lim_{n\to\infty} y_n = p.$$

*Idea de demostración.* Aplicar la definición del límite. □

**5 Lema** (sobre el límite de las iteraciones de una función continua)**.** *Sea $X$ un espacio métrico, sea $f\colon X \to X$ una función continua y sea $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ una sucesión en $X$ que converge a un punto $p$, $p \in X$. Entonces $f(p) = p$.*

*Demostración.* Pasamos al límite en la igualdad $f(x_n) = x_{n+1}$. Como $f$ es continua, $f(x_n) \to p$. Por otro lado, de la Proposición 4 se sigue que $x_{n+1} \to p$. Entonces $f(p) = p$. □

**6 Lema** (la órbita de un punto bajo una función contractiva es una sucesión de Cauchy)**.** *Sea $X$ un espacio métrico, sea $f\colon X \to X$ una función contractiva y sea $a \in X$. Para cada $n$ en $\mathbb{N}_0$, pongamos*

$$x_n \coloneqq f^{[n]}(a).$$

*Entonces la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy.*

*Primera demostración, usando la desigualdad fundamental.* Para cualesquiera $m, n$ en $\mathbb{N}_0$ aplicamos la desigualdad fundamental (1) a los puntos $x_m$ y $x_n$:

$$d(x_m, x_n) \le \frac{1}{1-L}\big(d(x_m, x_{m+1}) + d(x_n, x_{n+1})\big).$$

Notamos que $d(x_m, x_{m+1}) = d(f^{[m]}(a), f^{[m]}(f(a))) \le L^m d(a, f(a))$ y de manera similar $d(x_n, x_{n+1}) \le L^n d(a, f(a))$. Por eso

$$d(x_m, x_n) \le \frac{d(a, f(a))}{1-L}\big(L^m + L^n\big).$$

Cuando $m$ y $n$ tienden a infinito, la expresión $L^m + L^n$ tiende a cero. □

*Segunda demostración, trabajando con sumas de progresiones geométricas.* Notamos que

$$d(x_n, x_{n+1}) \le L^n d(a, f(a)).$$

Si $n < m$, entonces por la desigualdad del triángulo

$$d(x_n, x_m) \le \sum_{j=n}^{m-1} d(x_j, x_{j+1}) \le d(a, f(a)) \sum_{j=n}^{m-1} L^j \le \frac{d(a, f(a))}{1-L}\, L^n. \tag{2}$$

La última expresión tiende a cero, cuando $n$ tiende a infinito. □

**7 Teorema** (teorema de Banach sobre el punto fijo de la función contractiva)**.** *Sea* $(X, d)$ *un espacio métrico completo,* $X \neq \varnothing$*, y sea* $f \colon X \to X$ *una función contractiva con coeficiente* $L \in [0, 1)$*. Entonces:*

1. *La función* $f$ *tiene un único punto fijo; lo denotemos por* $p$*.*

2. *Si* $a \in X$ *y la sucesión* $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ *está definida mediante las reglas*

$$x_0 := a, \qquad x_n := f(x_{n-1}), \tag{3}$$

   *entonces esta sucesión converge a* $p$*, y para cada* $n$ *en* $\mathbb{N}$

$$d(x_n, p) \le \frac{d(a, f(a))}{1 - L} L^n. \tag{4}$$

*Demostración.* La demostración sale fácilmente de los lemas anteriores. Por la Proposición 2, $f$ no puede tener dos puntos fijos diferentes entre si. La existencia del punto fijo se demuestra de manera constructiva, simultáneamente con el inciso 2. Sea $a \in X$ y la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ está definida mediante (3). Por el Lema 6, la sucesión $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ es de Cauchy. El espacio $X$ es completo, por eso la sucesión tiene un límite. Lo denotamos por $p$. Por el Lema 5, $p$ es un punto fijo de $f$. Aplicamos la desigualdad fundamental (1) a los puntos $x_n$ y $p$ y obtenemos (4):

$$d(x_n, p) \le \frac{d(x_n, x_{n+1})}{1 - L} \le \frac{d(x_0, f(x_0))}{1 - L} L^n. \qquad \square$$

**8 Observación.** La desigualdad (4) también se puede deducir de (2), pasando al límite cuando $m$ tiende al infinito.

**9 Observación.** El teorema del punto fijo de Banach es constructivo. La existencia del punto fijo en este teorema se demuestra de manera constructiva, a saber, se da una receta para aproximar el punto fijo.

**10 Observación** (aplicaciones)**.** El teorema del punto fijo se utiliza en numerosas aplicaciones, tanto teóricas como prácticas: para demostrar el teorema de la función implícita (es un camino de demostración), para demostrar la existencia y unicidad de soluciones de ciertas ecuaciones diferenciales, para justificar varios algoritmos de métodos numéricos y del álgebra lineal numérica, para construir varios fractales.

**11 Corolario** (existencia y unicidad del punto fijo de una función cuya potencia es contractiva). *Sea $(X, d)$ un espacio métrico completo, $X \neq \varnothing$, sea $f\colon X \to X$ y sea $N \in \mathbb{N}$ tales que la función $f^{[N]}$ es contractiva con un coeficiente $L$ en $[0, 1)$. Entonces la función $f$ tiene un único punto fijo $p$, y para cada $x_0$ en $X$ la sucesión $(f^{[n]}(x_0))_{n=0}^{\infty}$ converge a $p$.*

*Demostración.* Por el teorema sobre el punto fijo de una función contractiva, la función $f^{[N]}$ tiene un único punto fijo. Lo denotamos por $p$. Demostremos que $p$ es un punto fijo de $f$. La igualdad $f^{[N]}(f(p)) = f(f^{[N]}(p)) = f(p)$ muestra que $f(p)$ es un punto fijo de $f^{[N]}$, y por la unicidad concluimos que $f(p) = p$. Demostremos que $p$ es el *único* punto fijo de $f$. Si $f$ tiene un punto fijo $q$, entonces es fácil mostrar por inducción que $f^{[n]}(q) = q$ para cada $n$ en $\mathbb{N}$; en particular, $f^{[N]}(q) = q$, por lo cual $q = p$.

Ahora elegimos $x_0$ en $X$ y mostremos que la sucesión $(f^{[n]}(x_0))_{n=0}^{\infty}$ converge a $p$. Denotemos por $M$ al número

$$M := \max_{0 \leq j < N} d(f^{[j]}(x_0), f^{[j+N]}(x_0)).$$

Dado $n$ en $\mathbb{N}_0$, dividimos $n$ con resto entre $N$, es decir, encontramos $r$ en $\{0, \ldots, N-1\}$ y $m$ en $\mathbb{N}_0$ tales que

$$n = mN + r.$$

Aplicamos la desigualdad (4) a la iteración $m$ de la función $f^{[N]}$ y al punto inicial $f^{[r]}(x_0)$. Entonces obtenemos que

$$d(f^{[n]}(x_0), p) \leq \frac{L^m}{1-L} d(f^{[r]}(x_0), f^{[N+r]}(x_0)) \leq L^{\lfloor n/N \rfloor} \frac{M}{1-L}.$$

La última expresión tiende a 0 cuando $n$ tiende a $\infty$. $\square$