Conjuntos finitos

Para cada n en $\mathbb{N}$, denotamos $\{1, \ldots, n\}$ por J_n. Además, pongamos $J_0 = \varnothing$.

1 Definición. Un conjunto A se llama *finito*, si $A = \varnothing$ o existe n en $\mathbb{N}$ tal que $A \sim J_n$.

Otra forma equivalente: un conjunto A se llama *finito*, si existe n en $\mathbb{N}_0$ tal que $A \sim J_n$.

2 Ejercicio. Sean A un conjunto, $n \in \mathbb{N}_0$, $A \sim J_n$, $b \notin A$. Demuestre que $A \cup \{b\} \sim J_{n+1}$.

3 Ejercicio. Sean A y B dos conjuntos disjuntos, $m, n \in \mathbb{N}_0$, $A \sim J_m$, $B \sim J_n$. Demuestre que $A \cup B \sim J_{m+n}$.

4 Lema (sobre J_{n+1} sin un elemento)**.** *Para cada n en $\mathbb{N}_0$ y cada b en J_{n+1},*

$$J_n \sim J_{n+1} \setminus \{b\}.$$

Demostración. Definimos $f\colon J_n \to J_{n+1} \setminus \{b\}$ mediante la siguiente regla: $f(x) := x$ para $x < b$; $f(x) := x + 1$ para $x \geq b$. Entonces f es una biyección. □

5 Proposición (sobre los subconjuntos de J_n)**.** *Para cada n en $\mathbb{N}_0$ y cada $A \subseteq J_n$, existe m en $\mathbb{N}_0$ tal que $m \leq n$ y $A \sim J_m$.*

Demostración. Denotemos por $\mathcal{A}(n)$ la siguiente afirmación:

$$\forall A \subseteq J_n \quad \exists m \in \mathbb{N}_0 \quad \big(m \leq n \quad A \sim J_m\big).$$

Demostremos $\mathcal{A}(n)$ para todo n en $\mathbb{N}_0$, aplicando la inducción matemática sobre n.

Demostremos $\mathcal{A}(0)$. Sea $A \subseteq J_0$. Entonces $A = \varnothing = J_0$.

Verifiquemos $\mathcal{A}(1)$ (este paso no es obligatorio). Sea $A \subseteq J_1$. Entonces hay dos casos: $A = \varnothing$ o $A = J_1$. En el primer caso $m = 0$, en el segundo $m = 1$.

Supongamos que $n \in \mathbb{N}_0$ y se cumple $\mathcal{A}(n)$. Demostremos $\mathcal{A}(n+1)$. Sea $A \subseteq J_{n+1}$. Si $A = J_{n+1}$, entonces $A \sim J_{m+1}$. Supongamos que $A \neq J_{n+1}$. Sea $b \in J_{n+1} \setminus A$. Notemos que $A \subseteq J_{n+1} \setminus \{b\}$. Usando el Lema 4, construimos una biyección $f\colon J_n \to J_{n+1} \setminus \{b\}$. Pongamos $C = f^{-1}[A]$. Entonces $C \subseteq J_n$ y $C \sim A$. Por la hipótesis de inducción (es decir, por la afirmación $\mathcal{A}(n)$), aplicada al conjunto C, existe m en $\mathbb{N}_0$ tal que $C \sim J_m$. Luego $A \sim C \sim J_m$. □

6 Ejercicio. Sea A un conjunto finito y sea $B \subseteq A$. Demuestre que B es finito.

7 Ejercicio. Sean A y B conjuntos finitos. Demuestre que su unión $A \cup B$ también es un conjunto finito.

8 Proposición (sobre la equipotencia de J_n y J_m)**.** *Para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}_0$, si $m < n$, entonces $J_m \not\sim J_n$.*

Demostración. Realicemos la inducción matemática sobre m. En otras palabras, demostremos por inducción matemática la siguiente afirmación $\mathcal{A}(m)$:

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad (n > m) \quad \Rightarrow \quad (J_m \not\sim J_n).$$

Demostremos $\mathcal{A}(0)$. Sea $n > 0$. Queremos demostrar que $J_m \not\sim J_n$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $J_m \not\sim J_n$. Entonces existe una biyección $f\colon J_0 \to J_n$. Pero $f[\varnothing] = \varnothing \neq J_n$, así que f no puede ser biyección.

Supongamos $\mathcal{A}(m)$ y demostremos $\mathcal{A}(m+1)$. Sea $n > m + 1$. Queremos demostrar que $J_m \not\sim J_n$. Razonando por reducción al absurdo, supongamos que $J_m \not\sim J_n$. Entonces existe una biyección $f\colon J_{m+1} \to J_n$. Pongamos $b = f(m+1)$. Definimos $g\colon J_m \to J_n \setminus \{b\}$ mediante la regla $g(x) = f(x)$. Entonces g es una biyección. Por otro lado, $J_n \setminus \{b\} \sim J_{n-1}$. Obtenemos $J_m \sim J_{n-1}$, y $m < n - 1$. Esto contradice a la hipótesis de la inducción $\mathcal{A}(m)$. □

La Proposición 8 se puede reformular de la siguiente manera: para cualesquiera m, n en $\mathbb{N}_0$, $J_m \sim J_n$ si y solo si $m = n$.

9 Ejercicio. Demostrar que para cada m, n en $\mathbb{N}_0$, $J_m \times J_n \sim J_{mn}$.

10 Definición. Un subconjunto A de $\mathbb{N}$ se llama *acotado* si existe b en $\mathbb{N}$ tal que para cada a en A se cumple la desigualdad $a \leq b$.

Es fácil ver que $\varnothing$ es acotado y $\mathbb{N}$ no es acotado.

11 Proposición. *Cualquier subconjunto acotado de $\mathbb{N}$ es finito.*

Demostración. Sean $A \subseteq \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$, y A es acotado por n, esto es, para cada a en A se cumple $a \leq n$. Entonces $A \subseteq J_n$, y por la Proposición 5 existe m en $\mathbb{N}$ tal que $A \sim J_m$. □

12 Proposición. *Cualquier subconjunto finito de $\mathbb{N}$ es acotado.*

Demostración. Se puede demostrar por inducción sobre n la siguiente afirmación: si $A \sim J_n$, entonces A es acotado. □

13 Proposición. *Para cada n en $\mathbb{N}_0$, $J_n \not\sim \mathbb{N}$.*