Álgebras finitas de conjuntos

1 Definición. Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F}$ una colección de subconjuntos de X: $\mathcal{F} \subseteq 2^X$. Se dice que $\mathcal{F}$ es un *álgebra* de conjuntos sobre X si la colección $\mathcal{F}$ contiene al conjunto vacío y es cerrada bajo los complementos y bajo la operación de unión de dos conjuntos:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$.
2. Para cada A en $\mathcal{F}$, $X \setminus A \in \mathcal{F}$.
3. Para cada A, B en $\mathcal{F}$, $A \cup B = \mathcal{F}$.

2 Proposición. *Sea $\mathcal{F}$ un álgebra de conjuntos sobre $\mathcal{F}$. Entonces $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones finitas: para cada m en $\mathbb{N}$ y cualesquiera $A_1, \ldots, A_m$ en $\mathcal{F}$,*

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathcal{F}.$$

Idea de demostración. Inducción sobre m. □

Recordemos que la definición de σ-álgebra es similar a la Definición 1, pero en vez de la condición 3 se pide que $\mathcal{F}$ sea cerrada bajo las uniones numerables.

3 Proposición. *Sea X un conjunto y sea $\mathcal{F}$ un álgebra de conjuntos sobre X. Supongamos que $\mathcal{F}$ es finita. Entonces $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.*

Idea de demostración. Mostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones numerables. Sea $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{F}$. Pongamos

$$\mathcal{S} \coloneqq \{A_j : \ j \in \mathbb{N}\}.$$

El conjunto $\mathcal{S}$ es un subconjunto de $\mathcal{F}$, por eso $\mathcal{S}$ es finito, es decir, existen $q_1, \ldots, q_m$ en $\mathbb{N}$ tales que

$$\mathcal{S} = \{A_{q_1}, \ldots, A_{q_m}\}.$$

Luego la unión de la sucesión $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ coincide con la unión de los conjuntos $A_{q_1}, \ldots, A_{q_m}$, y esta unión pertenece a $\mathcal{F}$ por la Proposición 2:

$$\bigcup_{j\in\mathbb{N}} A_j = \bigcup_{Y\in\mathcal{S}} Y = \bigcup_{k=1}^{m} A_{q_k} \in \mathcal{F}. \qquad \square$$

4 Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y sea

$$\mathcal{G} = \big\{\{1, 4\}, \{2, 3, 4, 5\}\big\}.$$

Encontremos la σ-álgebra generada por $\mathcal{F}$.

Idea informal de la solución. Etapa 1. Aplicamos las operaciones de álgebra a los elementos de $\mathcal{G}$ hasta el momento, cuando ya no podemos construir conjuntos nuevos.

Etapa 2. Mostramos que la colección obtenida $\mathcal{F}$ es un álgebra. Por ser finita, es una σ-álgebra.

Etapa 3. Mostramos que si $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$, entonces $\mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$. Esto significa que $\mathcal{F}$ es la *mínima* σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$.

En la solución formal escrita abajo, hacemos las etapas 1 y 3 simultáneamente. □

Solución. 1. Supongamos que $\mathcal{H}$ es una σ-álgebra que contiene a $\mathcal{G}$. Entonces

- $\varnothing, X \in \mathcal{H}$,
- $\{1, 4\}$, $\{2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{G} \subseteq \mathcal{H}$,
- $\{2, 3, 5\} = X \setminus \{1, 4\} \in \mathcal{H}$,
- $\{1\} = X \setminus \{2, 3, 4, 5\} \in \mathcal{H}$,
- $\{1, 2, 3, 5\} = \{1\} \cup \{2, 3, 5\} \in \mathcal{H}$,
- $\{4\} = X \setminus \{1, 2, 3, 5\} \in \mathcal{H}$.

Pongamos

$$\mathcal{F} := \big\{\varnothing, \{1\}, \{1, 2, 3, 5\}, \{1, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{2, 3, 4, 5\}, \{4\}, X\big\}.$$

Hemos demostrado que $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}$.

2. Demostremos que $\mathcal{F}$ es un álgebra. Tenemos que $\varnothing \in \mathcal{F}$. Para demostrar que la colección $\mathcal{F}$ es cerrada bajo los complementos, agrupamos sus elementos en los siguientes pares complementarios:

$$\begin{array}{lcl}
\varnothing & \leftrightarrow & X, \\
\{1\} & \leftrightarrow & \{2, 3, 4, 5\}, \\
\{1, 2, 3, 5\} & \leftrightarrow & \{4\}, \\
\{1, 4\} & \leftrightarrow & \{2, 3, 5\}.
\end{array}$$

Mostremos que $\mathcal{F}$ es cerrada bajo las uniones de dos conjuntos. Notemos que para cada A en $\mathcal{F}$ se cumple

$$\varnothing \cup A = A \in \mathcal{F}, \qquad A \cup X = X \in \mathcal{F}, \qquad A \cup A = A \in \mathcal{F}.$$

Además, $A \cup B = B \cup A$. Por eso es suficiente llenar solo la parte triangular superior (o la parte triangular inferior) de la siguiente tabla.

$\cup$	$\{1\}$	$\{1,2,3,5\}$	$\{1,4\}$	$\{2,3,5\}$	$\{2,3,4,5\}$	$\{4\}$
$\{1\}$		$\{1,2,3,5\}$	$\{1,4\}$	$\{1,2,3,5\}$	X	$\{1,4\}$
$\{1,2,3,5\}$			X	$\{1,2,3,5\}$	X	X
$\{1,4\}$				X	X	$\{1,4\}$
$\{2,3,5\}$					$\{2,3,4,5\}$	$\{2,3,4,5\}$
$\{2,3,4,5\}$						$\{2,3,4,5\}$
$\{1,4\}$						

Junto con las observaciones arriba, la tabla muestra que la colección $\mathcal{F}$ es cerrada bajo la operación $\cup$. Esto significa que $\mathcal{F}$ es un álgebra. Por ser finita, $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra.

Conclusión. En el inciso 2 hemos mostrado que $\mathcal{F}$ es una σ-álgebra. Por el inciso 1, $\mathcal{F}$ es la mínima entre todas las σ-álgebras que contienen a la colección $\mathcal{H}$. Por consecuencia, $\mathcal{F}$ es la σ-álgebra generada por $\mathcal{G}$. $\square$

5 Ejercicio. Sea $X = \{1,2,3,4,5\}$. Hallar la σ-álgebra sobre X generada por la colección

$$\mathcal{G} = \big\{\{1,4\}, \{2,3,5\}\big\}.$$

6 Ejercicio. Sea $X = \{1,2,3,4,5\}$. Hallar la σ-álgebra sobre X generada por la colección

$$\mathcal{G} = \big\{\{1,3\}, \{4\}\big\}.$$