Extensión de funciones uniformemente continuas

Objetivos. Demostrar el teorema sobre la extensión continua de una función uniformemente continua definida en un subconjunto denso del dominio.

Aplicaciones. El teorema sobre la completación de espacios métricos.

Prerrequisitos. Funciones uniformemente continuas, espacios métricos completos.

1 Proposición (las funciones uniformemente continuas convierten sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy)**.** *Sea $f \in C_u(X, Y)$ y sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en X. Entonces $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en Y.*

2 Tarea. Determine si es cierta la afirmación recíproca a la Proposición 1. En otras palabras, supongamos que para cualquier sucesión de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X, la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es Cauchy en Y. Determine si la función f debe ser uniformemente continua.

3 Lema. *Sean $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$, $(y_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos sucesiones en X, convergentes al mismo punto a, $a \in X$. Definimos $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mediante la regla*

$$z_k = \begin{cases} x_m, & k = 2m - 1; \\ y_m, & k = 2m. \end{cases}$$

Entonces $\lim_{k\to\infty} z_k = a$.

4 Teorema (extensión continua de una función uniformemente continua definida en un subconjunto denso del dominio)**.** *Sean (X, d_X) un espacio métrico, (Y, d_Y) un espacio métrico completo, D un subconjunto denso de X, $f \in C_u(D, Y)$. Entonces existe una única función $g \in C(X, Y)$ tal que $g|_D = f$. Más aún, $g \in C_u(X, Y)$.*

Demostración. Unicidad. Sea $a \in X$. Usando la hipótesis que D es denso en X, encontramos una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en D tal que $x_n \to a$. Si g satisface la conclusión del teorema, entonces

$$g(a) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x_n),$$

así que el valor g en a se determina completamente por la función f.

Existencia. Sea $a \in X$. Entonces para cualquier sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en D que converge al punto a, la sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, luego la sucesión $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en Y. Como Y es completo, existe u en Y tal que $f(x_n) \to u$ cuando $n \to \infty$.

Sea $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alguna otra sucesión que tiende al punto a. Entonces la sucesión z definida mediante la regla

$$z_n := \begin{cases} x_k, & n = 2k-1, \\ y_k, & n = 2k, \end{cases}$$

también converge al punto a, y la sucesión $(f(z_n))_{n\in\mathbb{N}}$ tiene un límite. Como $(f(x_k))_{k\in\mathbb{N}}$ y $(f(y_k))_{k\in\mathbb{N}}$ son sus subsucesiones, obtenemos

$$\operatorname*{lím}_{k\to\infty} f(y_k) = \operatorname*{lím}_{n\to\infty} f(z_n) = \operatorname*{lím}_{k\to\infty} f(x_k) = u.$$

Pongamos $g(a) = u$. Según esta definición, si $x_n \to a$, entonces $f(x_n) \to g(a)$.

Mostremos que g es uniformemente continua. Sea $\delta > 0$ y sean $a, b \in X$ tales que $d(a,b) \le \delta$. Encontramos sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en D tales que $x_n \to a$, $y_n \to b$, cuando $n \to \infty$. Luego $f(x_n) \to g(a)$, $f(y_n) \to g(b)$. Dado $\varepsilon > 0$, encontramos n en $\mathbb{N}$ tal que

$$d_X(x_n, a) \le \delta, \quad d_X(y_n, b) \le \delta, \quad d_Y(f(x_n), g(a)) \le \varepsilon, \quad d_Y(f(y_n), g(b)) \le \varepsilon.$$

Entonces $d(x_n, y_n) \le 3\delta$ y

$$d_Y(g(a), g(b)) \le d_Y(g(a), f(x_n)) + d_Y(f(x_n), f(y_n)) + d_Y(f(y_n), g(b)) \le 2\varepsilon + \omega_f(3\delta).$$

Como ε es arbitrario, concluimos que $\omega_g(\delta) \le \omega_f(3\delta)$. Como f es uniformemente continua, $\omega_f(3\delta)$ tiende a 0 cuando δ tiende a 0. $\square$