Extensión de funcionales lineales continuos en espacios de Hilbert (un tema de la unidad “Espacios de Hilbert”)

Egor Maximenko

https://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

13 de marzo de 2024

Objetivos

Suponemos que H es un espacio de Hilbert complejo,
S es un subespacio cerrado de H, $f\colon S \to \mathbb{C}$ es un funcional lineal continuo.

Vamos a mostrar que existe un funcional lineal continuo $g\colon H \to \mathbb{C}$ tal que

$$g|_S = f, \qquad \|g\| = \|f\|.$$

Es un análogo del teorema de Hahn–Banach para espacios de Hilbert.

Prerrequisitos

- El espacio dual V^* de un espacio normado.
- El teorema de descomposición ortogonal de un espacio de Hilbert.

Repaso: el espacio dual de un espacio normado

Dados espacios normados complejos V y W,

$\mathcal{B}(V, W) :=$ el conjunto de todas transformaciones lineales continuas $V \to W$.

El espacio dual de V corresponde al caso $W = \mathbb{C}$:

$$V^* := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Recordemos que la norma en V^* se define mediante la siguiente regla:

$$\|f\|_{V^*} = \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \leq 1}} |f(x)|.$$

Repaso: el teorema de proyección ortogonal en un espacio de Hilbert

Sea H un espacio de Hilbert y sea S un subespacio cerrado de H.
Entonces, $\exists! P \in \mathcal{B}(H, H)$ tal que

$$\forall x \in H \qquad \Big(P(x) \in S \quad \wedge \quad x - P(x) \in S^{\perp} \Big).$$

Resultado principal

Proposición

Sean H un espacio de Hilbert, S un subespacio cerrado de H, $f \in S^*$.

Entonces, existe $g \in H^*$ tal que

$$g|_S = f \qquad \wedge \qquad \|g\|_{H^*} = \|f\|_{S^*}.$$

Idea de demostración

Sea P el operador de proyección ortogonal asociado al subespacio S.

Definimos $g\colon H \to \mathbb{C}$,

$$g(x) := f(P(x)).$$

Entonces, $g \in \mathcal{B}(H, \mathbb{C})$ y

$$\|g\|_{H^*} \le \|f\|_{S^*} \, \|P\| \le \|f\|_{S^*}.$$

Para cada x en S, tenemos que $Px = x$ y por eso

$$g(x) = f(x).$$