El eje real extendido

Egor Maximenko

http://www.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

25 de febrero de 2021

Objetivo:

conocer el concepto del eje real extendido $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$,

definir el orden y la topología en este conjunto.

Prerrequisitos:

relaciones binarios, orden, orden lineal (orden total), topología.

Aplicaciones:

simplificar el trabajo con inf y sup,

definir el valor de cualquier serie de números positivos.

Definición de $\overline{\mathbb{R}}$

$+\infty$ y $-\infty$ son simplemente dos símbolos.

$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$.

En el conjunto $\mathbb{R}$ ya está definido el orden común $<$.
Lo extendemos al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ mediante las siguientes reglas:

$$-\infty < a \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad a < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad -\infty < +\infty.$$

Luego definimos la relación binaria $\leq$ en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$a \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a < b \quad \vee \quad a = b.$$

Definición más formal del orden en $\overline{\mathbb{R}}$

Recordemos que una relación binaria es un conjunto de pares ordenados.

$$<_{\mathbb{R}} \; = \; \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \colon \; x < y\}.$$

Definición formal de la relación $<$ en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$<_{\overline{\mathbb{R}}} \quad := \quad <_{\mathbb{R}} \quad \cup \quad \{(-\infty, a) \colon \; a \in \mathbb{R}\} \quad \cup \quad \{(a, +\infty) \colon \; a \in \mathbb{R}\} \quad \cup \quad \{(-\infty, +\infty)\}.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto linealmente ordenado (=totalmente ordenado)

Se cumplen las siguientes propiedades.

1. La propiedad transitiva.
   Para todos $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$,
   $$\text{si} \quad a < b \quad \text{y} \quad b < c, \quad \text{entonces} \quad a < c.$$

2. La ley de tricotomía.
   Para todos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, se cumple una y sólo una de las siguientes tres condiciones:
   $$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

$\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto linealmente ordenado (=totalmente ordenado)

Se cumplen las siguientes propiedades.

1. La propiedad transitiva.
   Para todos $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$,
   $$\text{si} \quad a < b \quad \text{y} \quad b < c, \quad \text{entonces} \quad a < c.$$
2. La ley de tricotomía.
   Para todos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, se cumple una y sólo una de las siguientes tres condiciones:
   $$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

Demostración: ejercicio.

Notación para los invervalos

Para cualesquiera $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ se pone

$$\begin{aligned}]a, b[= (a, b) &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x < b\}, \\ [a, b[= [a, b) &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x < b\}, \\ ]a, b] = (a, b] &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x \leq b\}, \\ [a, b] &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Notación para los invervalos

Para cualesquiera $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ se pone

$$\begin{aligned}]a,b[= (a,b) &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x < b\}, \\ [a,b[= [a,b) &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x < b\}, \\ ]a,b] = (a,b] &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x \leq b\}, \\ [a,b] &:= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Por ejemplo,

$$[3,-4] = \emptyset, \qquad [7,7] = \{7\}, \qquad]7,7[= \emptyset.$$

Los intervalos abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{J} \;:=\; \{\,]a,b[\;:\; a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\,]a,+\infty] \;:\; a \in \mathbb{R}\} \cup \{\, [-\infty,b[\;:\; b \in \mathbb{R}\}.$$

Lema

El conjunto $\mathcal{J}$ es cerrado bajo la operación $\cap$.

$\bigcap$	$]c,d[$	$]c,+\infty]$	$[-\infty,d[$
$]a,b[$			
$]a,+\infty]$			
$[-\infty,b[$			

Los intervalos abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$

$$\mathcal{J} \;:=\; \{\,]a,b[\;:\; a,b\in\mathbb{R}\} \cup \{\,]a,+\infty] \;:\; a\in\mathbb{R}\} \cup \{\, [-\infty,b[\;:\; b\in\mathbb{R}\}.$$

Lema

El conjunto $\mathcal{J}$ es cerrado bajo la operación $\cap$.

$\bigcap$	$]c,d[$	$]c,+\infty]$	$[-\infty,d[$
$]a,b[$			
$]a,+\infty]$		$]\max(a,c),+\infty]$	$]a,d[$
$[-\infty,b[$			

Los intervalos abiertos en $\mathbb{R}$

$$\mathcal{J} \; := \; \{\,]a,b[\;:\; a,b \in \mathbb{R}\} \cup \{\,]a,+\infty] \;:\; a \in \mathbb{R}\} \cup \{\, [-\infty,b[\;:\; b \in \mathbb{R}\}.$$

Lema

El conjunto $\mathcal{J}$ es cerrado bajo la operación $\cap$.

$\bigcap$	$]c,d[$	$]c,+\infty]$	$[-\infty,d[$
$]a,b[$	$]\max(a,c),\min(b,d)[$	$]\max(a,c),b[$	$]a,\min(b,d)[$
$]a,+\infty]$	$]\max(a,c),d[$	$]\max(a,c),+\infty]$	$]a,d[$
$[-\infty,b[$	$]c,\min(b,d)[$	$]c,b[$	$[-\infty,\min(b,d)[$

Definición de la topología en $\overline{\mathbb{R}}$

Por definición, los conjuntos abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$ son las uniones arbitrarias de los elementos de $\mathcal{J}$:

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}} := \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}}: \quad \exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}: \; A = \cup \mathcal{K}\}.$$

Definición de la topología en $\overline{\mathbb{R}}$

Por definición, los conjuntos abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$ son las uniones arbitrarias de los elementos de $\mathcal{J}$:

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}} := \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} : \quad \exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{J} : \ A = \cup \mathcal{K}\}.$$

Ejercicio. Usando el lema, demostrar que $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ es una topología.

Definición de la topología en $\overline{\mathbb{R}}$

Por definición, los conjuntos abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$ son las uniones arbitrarias de los elementos de $\mathcal{J}$:

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}} := \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}}\colon \quad \exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}\colon\ A = \cup \mathcal{K}\}.$$

Ejercicio. Usando el lema, demostrar que $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ es una topología.

En otras palabras, $\mathcal{J}$ es una base de topología,
y $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ se define como la topología generada por esta base.

Definición de la topología en $\overline{\mathbb{R}}$

Por definición, los conjuntos abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$ son las uniones arbitrarias de los elementos de $\mathcal{J}$:

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}} := \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}}: \quad \exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{J}: \ A = \cup \mathcal{K}\}.$$

Ejercicio. Usando el lema, demostrar que $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ es una topología.

En otras palabras, $\mathcal{J}$ es una base de topología,
y $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ se define como la topología generada por esta base.

Ejercicio. Demostrar que el conjunto $[3, +\infty]$ no es abierto en $\overline{\mathbb{R}}$.

Vecindades abiertas de los elementos de $\overline{\mathbb{R}}$

Dado a en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}}(a) \;:=\; \big\{ V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}} \colon\; a \in V \big\}.$$

Vecindades abiertas de los elementos de $\overline{\mathbb{R}}$

Dado a en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}}(a) \ := \ \{V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}} \colon \ a \in V\}.$$

Proposición (sobre las vecindades de los puntos finitos)

Sea $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $p, q \in \mathbb{R}$, $p < a < q$, entonces $]p, q[\in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$.
2. Si $V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$, entonces existen $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $p < x < q$ y $]p, q[\subseteq V$.

Vecindades abiertas de los elementos de $\overline{\mathbb{R}}$

Dado a en $\overline{\mathbb{R}}$,

$$\tau_{\overline{\mathbb{R}}}(a) \ := \ \{V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}} \colon \ a \in V\}.$$

Proposición (sobre las vecindades de los puntos finitos)

Sea $a \in \mathbb{R}$.

1. Si $p, q \in \mathbb{R}$, $p < a < q$, entonces $]p, q[\in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$.
2. Si $V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(a)$, entonces existen $p, q \in \mathbb{R}$ tales que $p < x < q$ y $]p, q[\subseteq V$.

Ejercicio: demostrar esta proposición.

Vecindades abiertas de $+\infty$

Proposición

1. Para cada p en $\mathbb{R}$, $\quad]p, +\infty] \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$
2. Para cada V en $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, existe p en $\mathbb{R}$ tal que $\quad]p, +\infty] \subseteq V$.

Vecindades abiertas de $+\infty$

Proposición

1. Para cada p en $\mathbb{R}$, $\quad]p, +\infty] \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$
2. Para cada V en $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, $\quad$ existe p en $\mathbb{R}$ tal que $\quad]p, +\infty] \subseteq V$.

$$\boxed{V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)}$$

Vecindades abiertas de $+\infty$

Proposición

1. Para cada p en $\mathbb{R}$, $\quad]p, +\infty] \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$
2. Para cada V en $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, $\quad$ existe p en $\mathbb{R}$ tal que $\quad]p, +\infty] \subseteq V$.

$$\begin{tikzcd}
 & \boxed{\exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{J} \quad V = \cup \mathcal{K}} \\
\boxed{V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \boxed{+\infty \in V}
\end{tikzcd}$$

Vecindades abiertas de $+\infty$

Proposición

1. Para cada p en $\mathbb{R}$, $\quad]p, +\infty] \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$
2. Para cada V en $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, $\quad$ existe p en $\mathbb{R}$ tal que $\quad]p, +\infty] \subseteq V$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \boxed{\exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{J} \quad V = \cup \mathcal{K}} \arrow[dr] & \\
\boxed{V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \boxed{\exists L \in \mathcal{K} \quad +\infty \in L} \\
 & \boxed{+\infty \in V} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Vecindades abiertas de $+\infty$

Proposición

1. Para cada p en $\mathbb{R}$, $\quad]p, +\infty] \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$
2. Para cada V en $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty)$, $\quad$ existe p en $\mathbb{R}$ tal que $\quad]p, +\infty] \subseteq V$.

$$
\begin{tikzcd}
 & \exists \mathcal{K} \subseteq \mathcal{J} \quad V = \cup \mathcal{K} \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\
V \in \tau_{\overline{\mathbb{R}}}(+\infty) \arrow[ur] \arrow[dr] & & \exists L \in \mathcal{K} \quad +\infty \in L \arrow[r] & \exists p \in \mathbb{R} \quad]p, +\infty] \in V \\
 & +\infty \in V \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}
$$

Vecindades abiertas del punto $-\infty$

Ejercicio.

Enunciar y demostrar una proposición similar sobre las vecindades abiertas del punto $-\infty$.

Sucesiones cuyo límite es $+\infty$

Proposición

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad x_n > a.$$

Sucesiones cuyo límite es $+\infty$

Proposición

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad x_n > a.$$

Idea de demostración:

usar la proposición sobre las vecindades abiertas de $+\infty$.

Sucesiones cuyo límite es $+\infty$

Proposición

Sea $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$. Entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall a \in \mathbb{R} \qquad \exists k \in \mathbb{N} \qquad \forall n \geq k \qquad x_n > a.$$

Idea de demostración:

usar la proposición sobre las vecindades abiertas de $+\infty$.

Ejercicio:

enunciar y demostrar un criterio similar para $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Operaciones aritméticas en el eje real extendido

$a + (+\infty) = +\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$+\infty + (+\infty) = +\infty$.

$a + (-\infty) = -\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$-\infty + (-\infty) = -\infty$.

$+\infty + (-\infty)$ no está definido.

Operaciones aritméticas en el eje real extendido

$$
\begin{aligned}
a \cdot (+\infty) &:= +\infty \text{ para todo } a > 0. \\
a \cdot (+\infty) &:= -\infty \text{ para todo } a < 0. \\
a \cdot (-\infty) &:= +\infty \text{ para todo } a > 0. \\
a \cdot (-\infty) &:= -\infty \text{ para todo } a < 0. \\
0 \cdot (+\infty) &:= 0. \\
0 \cdot (-\infty) &:= 0. \\
+\infty \cdot (+\infty) &:= +\infty. \\
+\infty \cdot (-\infty) &:= -\infty \\
-\infty \cdot (-\infty) &:= +\infty.
\end{aligned}
$$

Ejercicio.

¿Es $(\overline{\mathbb{R}}, +)$ un grupo?

Ejercicio.

¿Se puede definie $+\infty + (-\infty)$ de tal manera que $(\overline{\mathbb{R}}, +)$ sea un grupo?

Ejercicio.

Demostrar que las operaciones $+$ y $\cdot$ en $[0, +\infty]$ cumplen con las leyes asociativas y conmutativas y también con la ley distributiva.

La ley de cancelación para la suma

Ejercicio.

Verificar que

$$\forall a \in [0, +\infty[\qquad \forall b, c \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \left(a + b = a + c \quad \Longrightarrow \quad b = c\right).$$

Ejercicio.

Verificar que la propiedad anterior no se extiende al caso $a = +\infty$.

La ley de cancelación para el producto

Ejercicio. Verificar que

$$\forall a \in \,]0, +\infty[\qquad \forall b, c \in \overline{\mathbb{R}} \qquad \big(ab = ac \quad \Longrightarrow \quad b = c\big).$$

Ejercicio.
Verificar que la propiedad anterior no se extiende a los casos $a = 0$ ni $a = +\infty$.

Sobre el acuerdo que $0 \cdot (+\infty) = 0$

El acuerdo que $0 \cdot (+\infty) = 0$ es cómodo en la teoría de la integral.

Sobre el acuerdo que $0 \cdot (+\infty) = 0$

El acuerdo que $0 \cdot (+\infty) = 0$ es cómodo en la teoría de la integral.

Ejercicio.
Encontrar sucesiones $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reales tales que

$$x_n \to 0, \qquad y_n \to +\infty, \qquad x_n y_n \not\to 0.$$

Continidad de las operaciones en $[0, +\infty]$

Ejercicio.

Consideremos la operación $+$ restringida a $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$.

¿Es continua esta función?

Continidad de las operaciones en $[0, +\infty]$

Ejercicio.

Consideremos la operación $+$ restringida a $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$.

¿Es continua esta función?

Ejercicio.

Consideremos la operación de multiplicación restringida a $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$.

¿Es continua esta función?