Eje real extendido

Objetivos. Conocer el concepto del eje real extendido $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, definir el orden y la topología en él.

Requisitos. Relación de orden, orden lineal (orden total), topología.

Orden en el eje real extendido

1 Definición. Vamos a considerar el conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, donde $+\infty$ y $-\infty$ son simplemente dos símbolos llamadas "más infinito" y "menos infinito" y cuyas propiedades se definen más adelante. El conjunto $\mathbb{R}\cup\{+\infty, -\infty\}$ se llama *eje real extendido* y se denota de la siguiente manera:

$$\overline{\mathbb{R}}, \qquad \mathbb{R}_{\mathrm{ext}}, \qquad \ddot{\mathbb{R}}, \qquad [-\infty, +\infty].$$

2 Definición (el orden en el eje real extendido)**.** Extendemos el orden común $<$ al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ mediante las siguientes reglas:

$$-\infty < a \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad a < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad -\infty < +\infty.$$

Luego definimos la relación binaria $\le$ en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$a \le b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a < b \quad \vee \quad a = b.$$

3 Proposición (eje real extendido como un conjunto linealmente ordenado)**.** *Se cumplen las siguientes propiedades:*

1. *Propiedad transitiva. Para todos $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$,*

$$\text{si} \quad a < b \quad \text{y} \quad b < c, \quad \text{entonces} \quad a < c.$$

2. *Ley de tricotomía. Para todos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, se cumple una y sólo una de las siguientes tres condiciones:*

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

Por lo tanto, $\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto linealmente ordenado*, es decir,* totalmente ordenado*.*

4 Definición (notación para invervalos)**.** Para cualesquiera $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, se pone

$$\begin{aligned}
(a, b) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x < b\},\\
[a, b) &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \le x < b\},\\
(a, b] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x \le b\},\\
[a, b] &= \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \le x \le b\}.
\end{aligned}$$

Topología del eje real extendido

5 Lema. *Es válida la siguiente tabla de intersección:*

$\bigcap$	(c,d)	$(c,+\infty]$	$[-\infty,d)$
(a,b)	$(\max(a,c),\min(b,d))$	$(\max(a,c),b)$	$(a,\min(b,d))$
$(a,+\infty]$	$(\max(a,c),d)$	$(\max(a,c),+\infty]$	(a,d)
$[-\infty,b)$	$(c,\min(b,d))$	(c,b)	$[-\infty,\min(b,d))$

En particular, si U y V son intervalos de la forma (a,b), $(a,+\infty]$ o $[-\infty,b)$, entonces la intersección $U\cap V$ también tiene una de estas tres formas.

6 Definición (topología en $\overline{\mathbb{R}}$)**.** Denotemos por $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ el conjunto de las uniones arbitrarias de intervalos de la forma

$$(a,b), \qquad (a,+\infty], \qquad [-\infty,b),$$

donde $a,b\in\mathbb{R}$.

7 Ejercicio. Demuestre que $\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$ es una topología. Es fácil resolver este ejercicio, se usa el concepto de *bases de topología.*

8 Ejercicio. Demuestre que el conjunto $[3,+\infty]$ no es abierto en $\overline{\mathbb{R}}$.

9 Definición (vecindad abierta de un punto)**.** La definición es la misma que en cualquier espacio topológico; la escribimos en $\overline{\mathbb{R}}$. Sea $a\in\overline{\mathbb{R}}$. Un conjunto U se llama *vecindad abierta* del punto a si $a\in U$ y $U\in\tau_{\overline{\mathbb{R}}}$.

10 Proposición (sobre vecindades abiertas de puntos finitos)**.** *Sea $x\in\mathbb{R}$.*

1. *Cada intervalo de la forma (a,b), donde $a<x$ y $x<b$, es una vecindad abierta de x.*

2. *Para cada vecindad abierta U de x existen a,b en $\mathbb{R}$ tales que $a<x<b$ y $(a,b)\subseteq U$.*

11 Ejercicio. Dé un ejemplo de vecindad de 5 que no tenga forma (a,b).

12 Proposición (sobre vecindades abiertas del punto $+\infty$)**.**

1. *Cada intervalo de la forma $(a,+\infty]$, donde $a\in\mathbb{R}$, es una vecindad abierta de $+\infty$.*

2. *Para cada vecindad abierta U de $+\infty$ existe un punto a en $\mathbb{R}$ tal que $(a,+\infty]\subseteq U$.*

13 Ejercicio (sobre vecindades abiertas del punto $-\infty$)**.** Enuncie y demuestre una proposición similar sobre vecindades abiertas del punto $-\infty$.

14 Proposición (criterio de sucesión en $\overline{\mathbb{R}}$ con límite $+\infty$)**.** *Una sucesión $x=(x_n)$ en $\overline{\mathbb{R}}$ tiene límite $+\infty$ si y sólo si para cada a en $\mathbb{R}$ existe un $N\in\mathbb{N}$ tal que para cada n en $\mathbb{N}$ con $n>N$ se cumple que $x_n>a$.*

15 Ejercicio. Enuncie un criterio de que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

Operaciones aritméticas en el eje real extendido

16 Definición (el eje real extendido y operaciones aritméticas)**.**

$a + (+\infty) = +\infty$ para cada a en $\mathbb{R}$.

$+\infty + (+\infty) = +\infty$.

$a + (-\infty) = -\infty$ para cada a en $\mathbb{R}$.

$-\infty + (-\infty) = -\infty$.

$+\infty + (-\infty)$ no está definido.

$a \cdot (+\infty) = +\infty$ para cada $a > 0$.

$a \cdot (+\infty) = -\infty$ para cada $a < 0$.

$a \cdot (-\infty) = +\infty$ para cada $a > 0$.

$a \cdot (-\infty) = -\infty$ para cada $a < 0$.

$0 \cdot (+\infty) = 0$.

$0 \cdot (-\infty) = 0$.

$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$.

$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$-\infty \cdot (-\infty) + \infty$.

17 Observación (el eje extendido no es un grupo respecto a la adición)**.** La operación de adición no es operación binaria en $\overline{\mathbb{R}}$ porque no está definido el resultado $+\infty + (-\infty)$. Más aún, si de alguna manera definimos $+\infty + (-\infty)$, entonces el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ con la operación extendida $+$ no es un grupo, porque no cumple con la ley de cancelación: $+\infty + (+\infty) = +\infty$, pero $+\infty \neq 0$.

18 Ejercicio. Demuestre que las operaciones $+$ y $\cdot$ en $[0, +\infty]$ cumplen con las leyes asociativas y conmutativas y también con la ley distributiva.

19 Ejercicio (la ley de cancelación para la adición en $\overline{\mathbb{R}}$)**.**

1. Para cada a en bR y cada b, c en $\mathbb{R}$, la igualdad $a + b = a + c$ implica que $b = c$.
2. La propiedad anterior no se extiende al caso $a = +\infty$.

20 Ejercicio (la ley de cancelación para la multiplicación en $\overline{\mathbb{R}}$)**.**

1. Para cada a en $(0, +\infty)$ y cada b, c en $\overline{\mathbb{R}}$, la igualdad $ab = ac$ implica que $b = c$.

2. La propiedad anterior no se extiende a los casos $a = 0$ ni $a = +\infty$.

21 Observación. El acuerdo que $0 \cdot (+\infty) = 0$ es cómodo en la teoría de la integral. Sin embargo, este acuerdo no se puede aplicar a los límites. Si $x_n \to 0$ y $y_n \to \infty$, entonces **no** podemos afirmar que $x_n y_n \to 0$. Dé un contraejemplo.

22 Ejercicio. ¿Es la operación de adición restringida a $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$ un mapeo continuo?

23 Ejercicio. ¿Es la operación de multiplicación restringida a $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$ un mapeo continuo?