Eje real extendido

Objetivos. Conocer el concepto del eje real extendido $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, definir el orden y la topología en él.

Requisitos. Relación de orden, orden lineal (orden total), topología.

Orden en el eje real extendido

1. Notación. Vamos a considerar el conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, donde $+\infty$ y $-\infty$ son simplemente dos símbolos llamadas “más infinito” y “menos infinito” y cuyas propiedades se definen más adelante. El conjunto $\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ se llama *eje real extendido* y se denota de la siguiente manera:

$$\overline{\mathbb{R}}, \qquad \mathbb{R}_{\text{ext}}, \qquad \ddot{\mathbb{R}}, \qquad [-\infty, +\infty].$$

2. Definición (orden en el eje real extendido). Extendemos el orden común $<$ al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ mediante las siguientes reglas:

$$-\infty < a \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad a < +\infty \quad \forall x \in \mathbb{R}, \qquad\qquad -\infty < +\infty.$$

Luego definimos la relación binaria $\leq$ en $\overline{\mathbb{R}}$:

$$a \leq b \qquad \Longleftrightarrow \qquad a < b \quad \vee \quad a = b.$$

3. Eje real extendido como un conjunto linealmente ordenado. Se cumplen las siguientes propiedades:

1. Propiedad transitiva. Para todos $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\text{si} \quad a < b \quad \text{y} \quad b < c, \quad \text{entonces} \quad a < c.$$

2. Ley de tricotomía. Para todos $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ se cumple una y sólo una de las siguientes tres condiciones:

$$a < b, \qquad a = b, \qquad b < a.$$

Así que $\overline{\mathbb{R}}$ es un conjunto *linealmente ordenado* (= totalmente ordenado).

4. Notación para invervalos. Para cualesquiera $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ se pone

$$(a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x < b\},$$
$$[a, b) = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x < b\},$$
$$(a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a < x \leq b\},$$
$$[a, b] = \{x \in \overline{\mathbb{R}} \colon a \leq x \leq b\}.$$

Topología del eje real extendido

5. Lema. Es válida la siguiente tabla de intersección:

$\bigcap$	(c,d)	$(c,+\infty]$	$[-\infty,d)$
(a,b)	$(\max(a,c),\min(b,d))$	$(\max(a,c),b)$	$(a,\min(b,d))$
$(a,+\infty]$	$(\max(a,c),d)$	$(\max(a,c),+\infty]$	(a,d)
$[-\infty,b)$	$(c,\min(b,d))$	(c,b)	$[-\infty,\min(b,d))$

En particular, si U y V son intervalos de la forma (a,b), $(a,+\infty]$ o $[-\infty,b)$, entonces la intersección $U \cap V$ también tiene una de estas tres formas.

6. Definición (topología en $\overline{\mathbb{R}}$). Por definición, los conjuntos abiertos en $\overline{\mathbb{R}}$ son las uniones arbitrarias de intervalos de la forma

$$(a,b), \qquad (a,+\infty], \qquad [-\infty,b),$$

donde $a,b \in \mathbb{R}$. Con el lema es fácil ver que se cumplen los axiomas de topología.

7. Ejercicio. Demuestre que el conjunto $[3,+\infty]$ no es abierto en $\overline{\mathbb{R}}$.

8. Definición (vecindad de un punto). La definición es la misma que en cualquier espacio topológico, la escribimos en $\overline{\mathbb{R}}$. Sea $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Un conjunto U se llama *vecindad* o *vecindad abierta* del punto a si $a \in U$ y U es un conjunto abierto en $\overline{\mathbb{R}}$.

9. Proposición (sobre vecindades de puntos finitos). Sea $x \in \mathbb{R}$.

1. Todo intervalo de la forma (a,b), donde $a < x$ y $x < b$, es una vecindad de x.

2. Para toda vecindad U de x existen $a,b \in \mathbb{R}$ tales que $a < x < b$ y $(a,b) \subset U$.

10. Ejercicio. Dé un ejemplo de vecindad de 5 que no tenga forma (a,b).

11. Proposición (sobre vecindades del punto $+\infty$).

1. Toda intervalo de la forma $(a,+\infty]$, donde $a \in \mathbb{R}$, es una vecindad de $+\infty$.

2. Para toda vecindad U de $+\infty$ existe un punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $(a,+\infty] \subset U$.

12. Ejercicio (sobre vecindades del punto $-\infty$). Enuncie y demuestre una proposición similar sobre vecindades del punto $-\infty$.

13. Límites de sucesiones. Una sucesión $x = (x_n)$ en $\overline{\mathbb{R}}$ tiene límite $+\infty$ si y sólo si para todo $a \in \mathbb{R}$ existe un $N \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n > N$ se cumple que $x_n > a$.

14. Ejercicio. Enuncie la definición de que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$.

Operaciones aritméticas en el eje real extendido

15. Definición (eje real extendido y operaciones aritméticas).

$a + (+\infty) = +\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$+\infty + (+\infty) = +\infty$.

$a + (-\infty) = -\infty$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

$-\infty + (-\infty) = -\infty$.

$+\infty + (-\infty)$ no está definido.

$a \cdot (+\infty) = +\infty$ para todo $a > 0$.

$a \cdot (+\infty) = -\infty$ para todo $a < 0$.

$a \cdot (-\infty) = +\infty$ para todo $a > 0$.

$a \cdot (-\infty) = -\infty$ para todo $a < 0$.

$0 \cdot (+\infty) = 0$.

$0 \cdot (-\infty) = 0$.

$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$.

$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$

$-\infty \cdot (-\infty) + \infty$.

16. Nota: el eje extendido no es grupo respecto a la adición. La operación de adición no es operación binaria en $\overline{\mathbb{R}}$ porque no está definido el resultado $+\infty + (-\infty)$. Además $\overline{\mathbb{R}}$ con las operaciones $+$ y $\cdot$ no cumple algunas de las propiedades comunes. Aún si definimos de alguna manera el resultado de la operación $+\infty+(-\infty)$, el conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ con la operación $+$ no será grupo porque no cumple con la ley de cancelación: $+\infty+(+\infty) = +\infty$, pero $+\infty \neq 0$.

17. Demuestre que las operaciones $+$ y $\cdot$ en $[0, +\infty]$ cumplen con las leyes asociativas y conmutativas y también con la ley distributiva.

18. Ley de cancelación para la suma.

1. Para todo $a \in [0, +\infty)$ y todos $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, la igualdad $a + b = a + c$ implica que $b = c$.
2. La propiedad anterior no se extiende al caso $a = +\infty$.

19. Ley de cancelación para el producto.

1. Para todo $a \in (0, +\infty)$ y todos $b, c \in \overline{\mathbb{R}}$, la igualdad $ab = ac$ implica que $b = c$.
2. La propiedad anterior no se extiende a los casos $a = 0$ ni $a = +\infty$.

20. Nota. El acuerdo que $0 \cdot (+\infty) = 0$ es cómodo en la teoría de la integral. Pero esta se aplica para los límites. Si $x_n \to 0$ y $y_n \to \infty$, entonces **no** podemos afirmar que $x_n y_n \to 0$ (dé un contraejemplo).

21. Ejercicio. ¿Es la operación de adición restringida a $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$ un mapeo continuo?.

22. Ejercicio. ¿Es la operación de multiplicación restringida a $[0, +\infty] \times [0, +\infty]$ un mapeo continuo?.