Engrape aquí
No doble

Temas selectos de análisis funcional y real (análisis armónico), posgrado.
Tercer examen parcial. Variante α.

Caracteres del grupo $\mathbb{R}$, definición y propiedades básicas de la transformada de Fourier de funciones integrables en $\mathbb{R}$, el lema de Riemann–Lebesgue para la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$, aproximación de la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$ por la transformada finita de Fourier, ejemplos de la transformada de Fourier, la transformada de Fourier y la derivada, convolución y el teorema de convolución, núcleos aproximativos en $\mathbb{R}$, el núcleo de calor, propiedad inyectiva de la transformada de Fourier, fórmula de inversión de Fourier.

Nombre:

El examen dura 110 minutos. Elija y resuelva bien algunos problemas de la siguiente lista. Intentos erroneos o incompletos valen mucho menos que soluciones correctas y completas.

Problema 1. *25 %.*
Caracteres del grupo $\mathbb{R}$. Sea $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ un caracter del grupo $\mathbb{R}$. Demuestre que existe un ξ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(x) = e^{2\pi i \xi x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Problema 2. *20 %.*
Propiedades elementales de la transformada de Fourier. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$.
I. Demuestre que la función $\widehat{f}$ es acotada.
II. Demuestre que la función $\widehat{f}$ es uniformemente continua (este inciso es el principal).

Problema 3. *20 %.*
Ejemplo: la transformada de Fourier de la función gaussiana. Calcule $\widehat{f}$ (enuncie la fórmula y demuéstrela), donde la función f está definida en $\mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(x) = e^{-\pi x^2}.$$

Problema 4. *20 %.*
Recuerde la definición del **núcleo de calor** $(H_t)_{t>0}$ en $\mathbb{R}$, conocido también como el núcleo de **Gauss–Weierstrass**. Demuestre que es un **núcleo aproximativo**. Usando el resultado del problema anterior y un cambio de variable apropiado, para cada $t > 0$ encuentre una función G_t tal que

$$H_t(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(\xi)\, e^{2\pi i \xi x}\, d\xi.$$

Problema 5. *20 %.*
Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$. Usando el resultado del problema anterior, demuestre la fórmula que exprese **la convolución del núcleo de calor con la función integrable** f en la siguiente forma:

$$(f * H_t)(x) = \int_{\mathbb{R}} G_t(\xi)\widehat{f}(\xi)\, e^{2\pi i \xi x}\, d\xi.$$

Problema 6. *20 %.*
Demuestre la **fórmula de inversión de Fourier** suponiendo que $f \in L^1(\mathbb{R})$ y $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$.

Problema 7. *20 %.*
Aproximación de la transformada de Fourier por la transformada finita de Fourier. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continuamente derivable que decae rápidamente en infinito. Sea M un número entero positivo par. Pongamos $n = M^2$,

$$x_k = -\frac{M}{2} + \frac{k}{M}, \qquad \xi_j = -\frac{M}{2} + \frac{j}{M} \qquad (0 \leqslant j, k < n).$$

Muestre que los valores de la función $\widehat{f}$ en los puntos $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ se pueden aproximar usando los valores de f en los puntos $x_0, \ldots, x_{n-1}$ y aplicando la transformada finita de Fourier F_n a cierto vector.

Problema 8. *25 %.*
Programación: aproximación de la transformada de Fourier por la transformada finita de Fourier. En algún lenguaje de programación escriba una función `approx_fourier_transform` que implemente la fórmula deducida en el problema anterior. Se supone que f y M son los argumentos de la función, y la función debe regresar un vector de números $\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}$ que aproximan $\widetilde{f}(\xi_0), \ldots, \widetilde{f}(\xi_{n-1})$, cuando n es grande. Dentro de la función `approx_fourier_transform` se recomienda llamar a la función `fft` que implementa la transformada rápida de Fourier.

Problema 9. *15 %.*
Comprobación numérica para un ejemplo. Sea f la función del Problema 3. En algún lenguaje de programación escriba una función `test_fourier_transform_gaussian` de un argumento M que calcule y devuelva el número

$$\max_{0 \leqslant j < M^2} |\widetilde{f}(\xi_j) - \nu_j|,$$

donde $\widetilde{f}(\xi_j)$ son los valores exactos de $\widetilde{f}$, y ν_j son los valores aproximados que devuelve la función `approx_fourier_transform` del problema anterior.

Engrape aquí
No doble

Temas selectos de análisis funcional y real (análisis armónico), posgrado.
Tercer examen parcial. Variante β.

Caracteres del grupo $\mathbb{R}$, definición y propiedades básicas de la transformada de Fourier de funciones integrables en $\mathbb{R}$, el lema de Riemann–Lebesgue para la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$, aproximación de la transformada de Fourier en $\mathbb{R}$ por la transformada finita de Fourier, ejemplos de la transformada de Fourier, la transformada de Fourier y la derivada, convolución y el teorema de convolución, núcleos aproximativos en $\mathbb{R}$, el núcleo de calor, propiedad inyectiva de la transformada de Fourier, fórmula de inversión de Fourier.

Nombre:

El examen dura 110 minutos. Elija y resuelva bien algunos problemas de la siguiente lista. Intentos erroneos o incompletos valen mucho menos que soluciones correctas y completas.

Problema 1. *25 %.*
Caracteres del grupo $\mathbb{R}$. Sea $\gamma\colon \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ un caracter del grupo $\mathbb{R}$. Demuestre que existe un ξ en $\mathbb{R}$ tal que

$$\gamma(x) = e^{2\pi i \xi x} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Problema 2. *20 %.*
La transformada de Fourier de la derivada. Sea $f \in L^1(\mathbb{R})$ tal que $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Enuncie y demuestre la fórmula para la transformada de Fourier de f'. Justifique bien todos los pasos intermedios.

Problema 3. *20 %.*
Ejemplo: la transformada de Fourier de un caso particular del núcleo de Poisson. Calcule $\widehat{f}$ (enuncie la fórmula y demuéstrela), donde la función f está definida en $\mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}.$$

Problema 4. *20 %.*
Demuestre que el **núcleo de Poisson** $(P_t)_{t>0}$ en $\mathbb{R}$, definido mediante la regla

$$P_t(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)},$$

es un **núcleo aproximativo**. Usando el resultado del problema anterior y un cambio de variable apropiado, para cada $t > 0$ calcule la transformada de Fourier $\widehat{P_t}$ de la función P_t.

Problema 5. *20 %.*
Sea $(K_t)_{t>0}$ un núcleo aproximativo en $\mathbb{R}$. Demuestre que si f es una función acotada y uniformemente continua en $\mathbb{R}$, entonces su **convolución con el núcleo aproximativo converge uniformemente** a la función f:

$$\lim_{t>0} \sup_{x\in\mathbb{R}} |(K_t * f)(x) - f(x)| = 0.$$

Problema 6. *20 %.*
Demuestre el **lema de Riemann–Lebesgue** para funciones integrables en $\mathbb{R}$: si $f \in L^1(\mathbb{R})$, entonces $\widehat{f}(\xi) \to 0$ cuando $|\xi| \to +\infty$. Se puede usar el hecho que las funciones escalonadas (combinaciones lineales de funciones características de intervalos acotados) forman un subconjunto denso de $L^1(\mathbb{R})$.

Problema 7. *20 %.*
Aproximación de la transformada de Fourier por la transformada finita de Fourier. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función continuamente derivable que decae rápidamente en infinito. Sea M un número entero positivo par. Pongamos $n = M^2$,

$$x_k = -\frac{M}{2} + \frac{k}{M}, \qquad \xi_j = -\frac{M}{2} + \frac{j}{M} \qquad (0 \leqslant j, k < n).$$

Muestre que los valores de la función $\widehat{f}$ en los puntos $\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ se pueden aproximar usando los valores de f en los puntos $x_0, \ldots, x_{n-1}$ y aplicando la transformada finita de Fourier F_n a cierto vector.

Problema 8. *25 %.*
Programación: aproximación de la transformada de Fourier por la transformada finita de Fourier. En algún lenguaje de programación escriba una función `approx_fourier_transform` que implemente la fórmula deducida en el problema anterior. Se supone que f y M son los argumentos de la función, y la función debe regresar un vector de números $\nu_0, \ldots, \nu_{n-1}$ que aproximan $\widetilde{f}(\xi_0), \ldots, \widetilde{f}(\xi_{n-1})$, cuando n es grande. Dentro de la función `approx_fourier_transform` se recomienda llamar a la función `fft` que implementa la transformada rápida de Fourier.

Problema 9. *15 %.*
Comprobación numérica para un ejemplo. Sea f la función del Problema 3. En algún lenguaje de programación escriba una función `test_fourier_transform_poisson` de un argumento M que calcule y devuelva el número

$$\max_{0 \leqslant j < M^2} |\widetilde{f}(\xi_j) - \nu_j|,$$

donde $\widetilde{f}(\xi_j)$ son los valores exactos de $\widetilde{f}$, y ν_j son los valores aproximados que devuelve la función `approx_fourier_transform` del problema anterior.