Examen parcial III
Derivada e integral de Lebesgue
Variante 1 (demostrativa)
Análisis matemático III

Nombre:

Calificación:

$\boxed{1}$ Escriba:

- La definición de una cubierta de Vitali.
- El lema de Vitali (sin demostración).
- El teorema sobre la derivada de una función creciente.

$\boxed{2}$ Enuncie y demuestre el teorema sobre la integral indefinida de la derivada de una función absolutamente continua. Enuncie (sin demostración) las proposiciones auxiliares usadas en la demostración de este teorema.

$\boxed{3}$ Enuncie y demuestre el lema sobre una función $f \in L^1[a, b]$ tal que $\int_a^x f(t)\,dt = 0$ para todo $x \in [a, b]$.

$\boxed{4}$ Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada. Demuestre que

$$\int_a^b |f'| \leqslant \mathrm{Var}_a^b(f).$$

$\boxed{5}$ Sea F una función absolutamente continua en $[a, b]$. Demuestre las siguientes fórmulas para su variación total y variación positiva:

$$\mathrm{Var}_a^b(F) = \int_a^b |F'(t)|\,dt, \qquad \mathrm{PVar}_a^b(F) = \int_a^b (F(t))^+\,dt.$$

Examen parcial III
Derivada e integral de Lebesgue
Variante 2 (demostrativa)
Análisis matemático III

Nombre:

Calificación:

$\boxed{1}$ Escriba:

- La definición de la variación total de una función.
- La definición de una función absolutamente continua.
- El criterio de una función absolutamente continua (sin demostración).

$\boxed{2}$ Enuncie y demuestre el criterio de una función de variación acotada. Enuncie (sin demostración) las proposiciones auxiliares usadas en la demostración de este criterio.

$\boxed{3}$ Enuncie y demuestre el teorema sobre la derivada de la función

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)\,dt \qquad (x \in [a, b]),$$

donde $f \in L^1[a, b]$.

$\boxed{4}$ Construya una función creciente en $[0, 1]$ que tenga un salto en cada punto racional de $[0, 1]$.

$\boxed{5}$ Sea $F\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Demuestre que las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) F satisface una condición de Lipschitz en $[a, b]$;

(b) F es absolutamente continua en $[a, b]$ y $F' \in L^\infty[a, b]$.