Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático III, LFM. Segundo examen parcial.
Variante 1, las boletas con la última cifra impar.

Derivación e integración, funciones de variación acotada, funciones absolutamente continuas, integrales que dependen de parámetros, funciones Gamma y Beta.

Nombre:

El examen dura 120 minutos, más 30 minutos para escanear y enviar.
Elija no más de 4 problemas y resuélvalos bien.

Problema 1. *20 %.*
Los saltos de una función decreciente. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Es fácil ver que para cada x en (a, b) existen límites laterales $f(x^-)$ y $f(x^+)$ (hay que recordar y escribir su definición formal). Denotemos por S al conjunto de los puntos x en (a, b) donde f tiene saltos:

$$S \coloneqq \left\{x \in (a, b) \colon\ f(x^-) > f(x^+)\right\}.$$

Sin pasar a una función creciente, demostrar que el conjunto S es a lo más numerable. En la demostración se pueden enunciar y usar hechos simples sobre la comparación de los límites laterales de la función f.

Problema 2. *20 %.*
La variación positiva de una función en un intervalo dividido en dos partes. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a < c < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$. Demostrar que

$$\mathrm{PVar}_a^b(f) = \mathrm{PVar}_a^c(f) + \mathrm{PVar}_c^b(f).$$

Problema 3. *20 %.*
Funciones absolutamente continuas. Sea $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. Definimos $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \coloneqq \int_x^b f \, d\mu \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Demostrar que $g \in \mathrm{AC}([a, b], \mathbb{R})$. No se permite pasar a las integrales con el límite *superior* variable.

Problema 4. *25 %.*
El cálculo de una integral por medio de la regla de Leibniz. Usando la regla de Leibniz calcular la integral

$$G(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \cos(xt)\,dt \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Sugerencias.

I. Justificar la aplicación de la regla de Leibniz.

II. Usando la regla de Leibniz y la integración por partes demostrar que

$$G'(x) = -\frac{x}{2}\,G(x).$$

III. Calcular $G(0)$ y resolver la ecuación diferencial del inciso II.

Problema 5. *20 %.*
Las funciones Beta y Gamma y sus aplicaciones.

I. Demostrar la fórmula que expresa la siguiente integral en términos de la función B:

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^p(x) \cos^q(x)\,dx \qquad (p, q \in \mathbb{R},\ p, q > -1).$$

II. Calcular la integral

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^6(x) \cos^4(x)\,dx.$$

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático III, LFM. Segundo examen parcial.
Variante 2, las boletas con la última cifra par.

Derivación e integración, funciones de variación acotada, funciones absolutamente continuas, integrales que dependen de parámetros, funciones Gamma y Beta.

Nombre:

El examen dura 120 minutos, más 30 minutos para escanear y enviar.
Elija no más de 4 problemas y resuélvalos bien.

Problema 1. *20 %.*
Los límites laterales de una función decreciente. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función decreciente. Demostrar las siguientes afirmaciones sin pasar a funciones crecientes.

I. Para cada x en (a, b) existen límites laterales

$$f(x^-) \coloneqq \lim_{y \to x^-} f(y), \qquad f(x^+) \coloneqq \lim_{y \to x^+} f(y).$$

II. Para cada x en (a, b), se cumple la desigualdad $f(x^-) \geqslant f(x^+)$.

III. Para cada x, y en (a, b), si $x < y$, entonces $f(x^+) \geqslant f(y^-)$.

Problema 2. *20 %.*
Funciones de variación acotada o no acotada. Para cada una de las siguientes dos funciones, determinar si es de variación acotada o no acotada en $[0, 1]$. Justificar bien la respuesta.

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x^2 \cos \dfrac{1}{x}, & x \in (0, 1]. \end{cases} \qquad g(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & x = 0, \\ x \cos \dfrac{1}{x}, & x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Problema 3. *20 %.*
Funciones absolutamente continuas. Sea $f \in \mathrm{AC}([a, b], \mathbb{R})$. Supongamos que $M > 0$ y $|f(x)| \geqslant M$ para cada x en $[a, b]$. Definimos $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g(x) \coloneqq \frac{1}{f(x)} \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Demostrar que $g \in \mathrm{AC}([a, b], \mathbb{R})$.

Problema 4. *25 %.*
El cálculo de una integral por medio de la regla de Leibniz. Calcular la integral

$$H(u) := \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-ut^2}}{t^2}\,dt \qquad (u \geq 0).$$

Sugerencias.

I. Demostrar que H es continua en $[0, 1]$.

II. Para $\xi > 0$, justificar la derivación respecto al parámetro u, para $u \in (\xi, +\infty)$.

III. Calcular $H'(u)$ para $u > 0$. Calcular $H(0)$. Calcular explícitamente $H(u)$.

Problema 5. *20 %.*
Las funciones Beta y Gamma y sus aplicaciones.

I. Usando las funciones B, Γ y la fórmula de reflexión, calcular la integral

$$H(u) := \int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}}{1 + t^2}\,dt \qquad (0 < u < 1).$$

II. Suponiendo que $0 < \xi < 1$, justificar la aplicación de la regla de Leibniz (la derivación respecto al parámetro) a la integral del inciso I, para u en $(\xi, 1)$.

III. Usando los resultados de los incisos I y II calcular la integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{u-1}\,\ln(t)}{1 + t^2}\,dt \qquad (0 < u < 1).$$