Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LCFM. Segundo examen parcial. Variante α.

Funciones medibles, varios modos de convergencia y su comparación, aproximación de funciones medibles por funciones simples, definición de la integral de Lebesgue para funciones positivas, reales y complejas, teorema de la convergencia monótona y sus corolarios, lema de Fatou, teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Nombre:

El examen dura 80 minutos.

Problema 1. *25 %.*
Sucesión de funciones simples positivas que crece puntualmente y converge puntualmente a la función identidad del semieje real positivo. Construya una sucesión de funciones $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que:

(i) $\varphi_n\colon [0,+\infty] \to [0,+\infty)$ para cada $n \in \{1,2,\ldots\}$;

(ii) φ_n es simple y Borel-medible;

(iii) para cada $t \geqslant 0$ la sucesión $(\varphi_n(t))_{n=1}^{\infty}$ tiende a t;

(iv) $\varphi_n(t) \leqslant \varphi_{n+1}(t)$ para cada $t \geqslant 0$ y cada $n \in \{1,2,3,\ldots\}$.

Para la sucesión construida demuestre las propiedades (ii) y (iii), o la propiedad (iv).

Problema 2. *25 %.*
Ejemplo de análisis de varios modos de convergencia. Se considera el espacio $\mathbb{R}$ con la medida de Lebesgue μ y la sucesión de funciones $(f_n)_{n=1}^{\infty}$, donde $f_n\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_n \text{ es la función característica del intervalo } (0, 1/n).$$

Demuestre que la sucesión $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente a la función constante cero la cual denotemos por g. Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ y cada $n, k \in \{1,2,\ldots\}$ calcule los conjuntos

$$A(\varepsilon, n) \coloneqq \big\{x \in \mathbb{R}\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\big\}, \qquad B(\varepsilon, k) \coloneqq \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n).$$

Determine si f_n converge a g en la medida μ. Determine si f_n converge a g casi uniformemente respecto a μ.

Problema 3. *25 %.*
Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$ y sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Enuncie el **criterio de la convergencia casi uniforme** en términos de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$ definidos como en el problema anterior. Demuestre la implicación más difícil (es decir, la suficiencia).

Problema 4. *25 %.*
En este problema se pide escribir la parte principal de la demostración del **teorema de la convergencia monótona**. Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty])$, puntualmente creciente, y sea s una función de clase $\mathcal{SM}(X,\mathcal{F},[0,+\infty))$ tal que

$$\forall x\in X \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) \geqslant s(x).$$

Demuestre que para cualquier c en $(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n\,d\mu \geqslant c \int\limits_X s\,d\mu.$$

Problema 5. *25 %.*
Integral y valor absoluto. Sea $f\in L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$. Demuestre que

$$\left|\int\limits_X f\,d\mu\right| \leqslant \int\limits_X |f|\,d\mu.$$

Análisis Matemático II, LCFM. Segundo examen parcial. Variante β.

Funciones medibles, varios modos de convergencia y su comparación, aproximación de funciones medibles por funciones simples, definición de la integral de Lebesgue para funciones positivas, reales y complejas, teorema de la convergencia monótona y sus corolarios, lema de Fatou, teorema de la convergencia dominada de Lebesgue.

Nombre:

El examen dura 80 minutos.

Problema 1. *25 %.*
Medibilidad de la suma de dos funciones reales medibles. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Demuestre que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. En caso de utilizar algunos resultados auxiliares, hay que demostrar el más fuerte de estos resultados.

Problema 2. *25 %.*
Ejemplo de análisis de varios modos de convergencia. Se considera el espacio $(0, +\infty)$ con la medida de Lebesgue μ. Se definen las funciones $f_n\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f_n(x) = e^{-nx} \qquad (x > 0).$$

Muestre que f_n converge puntualmente a la función constante cero la cual denotemos por g. Demuestre que la convergencia no es uniforme, pero es casi uniforme. Puede usar las definiciones o los criterios en términos de los siguientes conjuntos auxiliares (es suficiente calcularlos para $0 < \varepsilon < 1$):

$$A(\varepsilon, n) := \big\{x > 0\colon\ |f_n(x) - g(x)| \geqslant \varepsilon\big\}, \qquad B(\varepsilon, k) := \bigcup_{n=k}^{\infty} A(\varepsilon, n).$$

Problema 3. *25 %.*
Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida, sean $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ una sucesión de funciones $\mathcal{F}$-medibles $X \to \mathbb{C}$, sea $g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

I. Deduzca una descripción de la **convergencia uniforme** $f \overset{Y}{\Longrightarrow} g$ en términos de los conjuntos $B(\varepsilon, k)$ definidos como en el problema anterior.

II. Sea $Y \in \mathcal{F}$. Enuncie y demuestre el criterio de la convergencia uniforme afuera del conjunto Y, en términos de los mismos conjuntos $B(\varepsilon, k)$:

$$f \overset{X \setminus Y}{\Longrightarrow} g \qquad \Longleftrightarrow \qquad ?$$

Problema 4. *25 %.*
Enuncie y demuestre el **lema de Fatou**. Se recomienda usar el teorema de la convergencia monótona.

Problema 5. *25 %.*
Integral de la suma de dos funciones reales integrables. Sean $f, g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$. Demuestre que $f + g \in L^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{R})$ y

$$\int_X (f + g)\, d\mu = \int_X f\, d\mu + \int_X g\, d\mu.$$