Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Primer examen parcial. Variante α.

Operaciones con familias de conjuntos, imágenes y preimágenes, sucesiones monótonas de conjuntos, supremos e ínfimos, sucesiones monótonas de números, topología del eje real, topología del eje real extendido, sigma-álgebras, medidas, funciones medibles, aproximación de funciones medibles por funciones simples.

Nombre	examen 1	tarea 1	particip. 1	parcial 1

El examen dura 100 minutos. Elija a lo más 5 problemas y resuélvalos bien.

Problema 1. *15 %.*
Desigualdad del triángulo para la diferencia simétrica. Sean A, B, C algunos conjuntos. Demuestre que

$$(A \triangle B) \subset (A \triangle C) \cup (C \triangle B).$$

Problema 2. *20 %.*
Estructura de una sucesión creciente de conjuntos. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente de conjuntos y sea $A_0 = \emptyset$. Pongamos $D_n = A_n \setminus A_{n-1}$ para cada n en $\{1, 2, \ldots\}$.
I. Sean $n, m \in \{1, 2, \ldots\}$ tales que $n \neq m$. Demuestre que $D_n \cap D_m = \emptyset$.
II. Sea $m \in \{1, 2, \ldots\}$. Demuestre que $A_m = \bigcup_{n=1}^{m} D_n$.

Problema 3. *20 %.*
El supremo de la suma de dos conjuntos, el caso cuando uno de los conjuntos no es acotado superiormente. Sean A y B dos conjuntos no vacíos de números reales, tales que A no es acotado superiormente. Demuestre que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.

Problema 4. *20 %.*
La sigma-álgebra de subconjuntos numerables y sus complementos. Sea X un conjunto infinito no numerable. Denotemos por $\mathcal{N}$ a la colección de todos sus subconjuntos numerables (usamos el convenio que los conjuntos finitos son numerables). Demuestre que la siguiente colección de conjuntos es una σ-álgebra sobre X:

$$\mathcal{F} \coloneqq \{Y \subset X: \quad Y \in \mathcal{N} \quad \vee \quad Y^c \in \mathcal{N}\}.$$

Problema 5. *20 %.*

Medida de la unión de una sucesión creciente de conjuntos. Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión creciente en $\mathcal{F}$. Demuestre que

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Problema 6. *20 %.*

Sucesión de funciones simples positivas que crece puntualmente y converge puntualmente a la función identidad del semieje real positivo. Construya una sucesión de funciones $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ tal que:

(i) $\varphi_n \colon [0, +\infty] \to [0, +\infty)$ para cada $n \in \{1, 2, \ldots\}$;

(ii) φ_n es simple y Borel-medible;

(iii) para cada $t \geqslant 0$ la sucesión $(\varphi_n(t))_{n=1}^{\infty}$ tiende a t;

(iv) $\varphi_n(t) \leqslant \varphi_{n+1}(t)$ para cada $t \geqslant 0$ y cada $n \in \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Para la sucesión construida demuestre las propiedades (ii) y (iii), o la propiedad (iv).

Engrape aquí
No doble

Análisis Matemático II, LFM. Primer examen parcial. Variante β.

Operaciones con familias de conjuntos, imágenes y preimágenes, sucesiones monótonas de conjuntos, supremos e ínfimos, sucesiones monótonas de números, topología del eje real, topología del eje real extendido, sigma-álgebras, medidas, funciones medibles, aproximación de funciones medibles por funciones simples.

Nombre	examen 1	tarea 1	particip. 1	parcial 1

El examen dura 100 minutos. Elija a lo más 5 problemas y resuélvalos bien.

Problema 1. *15 %.*
La imagen de la preimagen. I. Sea $f\colon X \to Y$ y sea $B \subset Y$. Compare $f[f^{-1}[B]]$ con B, esto es, escriba la contención correcta y demuéstrela.
II. Construya una función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y un conjunto $B \subset \mathbb{R}$ tales que $f[f^{-1}[B]] \neq B$.

Problema 2. *20 %.*
Estructura de una sucesión decreciente de conjuntos. Sea $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ una sucesión decreciente de conjuntos. Pongamos $D_n \coloneqq A_n \setminus A_{n+1}$ para cada n y $C \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$.
I. Sean $m, n \in \{1, 2, \ldots\}$ tales que $m < n$. Demuestre que $D_m \cap D_n = \emptyset$.
II. Demuestre que $\quad A_1 = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \right) \cup C.$

Problema 3. *20 %.*
El ínfimo del producto de un conjunto por un escalar positivo. Sea $A \subset \mathbb{R}$ tal que $A \neq \emptyset$ y sea $\lambda > 0$. Demuestre que $\inf(\lambda A) = \lambda \inf(A)$.

Problema 4. *20 %.*
Lemas para el teorema de la estructura de subconjuntos abiertos del eje real. Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}$.
I. Definimos en A una relación binaria: pongamos $x \sim y$ si $[x, y] \cup [y, x] \subset A$. Demuestre que $\sim$ es transitiva. Obviamente, $\sim$ es reflexiva y simétrica.
II. Sea $x \in A$. Pongamos $a_x \coloneqq \inf[x]_\sim, \quad b_x \coloneqq \sup[x]_\sim$. Demuestre que $[x]_\sim = (a_x, b_x)$.

Problema 5. *20 %.*
Propiedad subaditiva de la medida. Enuncie y demuestre la propiedad subaditiva de la medida primero para el caso dos conjuntos, luego para el caso infinito numerable, esto es, para una sucesión de conjuntos.

Problema 6. *20 %.*
Medibilidad de la suma de dos funciones reales medibles. Sea $(X, \mathcal{F})$ un espacio medible y sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. Demuestre que $f + g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$. En caso de utilizar algunos resultados auxiliares, hay que demostrar el más fuerte de estos resultados.