El rango esencial de una función medible (tarea adicional)

Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

Dados v en $\mathbb{C}$ y $\varepsilon > 0$, denotemos por $B_{\mathbb{C}}(v, \varepsilon)$ el disco en $\mathbb{C}$ con centro v y de radio ε:

$$B_{\mathbb{C}}(v, \varepsilon) \coloneqq \Big\{ z \in \mathbb{C} \colon \ |z - v| < \varepsilon \Big\}.$$

1 Definición (el rango esencial de una función medible definida en un espacio de medida)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. El *rango esencial* de f se define como el conjunto de todos los números $v \in \mathbb{C}$ tales que para cada $\varepsilon > 0$ la preimagen del disco $B_{\mathbb{C}}(v, \varepsilon)$ respecto a la función f tiene medida estrictamente positiva:

$$\mathcal{ER}(f) \coloneqq \Big\{ v \in \mathbb{C} \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(f^{-1}[B_{\mathbb{C}}(v, \varepsilon)]) > 0 \Big\}$$

2 Ejercicio. Usando la definición de la preimagen, mostrar que la definición de $\mathcal{ER}(f)$ se puede escribir de la siguiente manera equivalente:

$$\mathcal{ER}(f) = \Big\{ v \in \mathbb{C} \colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \in X \colon \quad |f(x) - v| < \varepsilon\}) > 0 \Big\}.$$

3 Problema (el rango esencial es cerrado)**.** Demuestre que $\mathcal{ER}(f)$ es un subconjunto cerrado del contradominio $\mathbb{C}$.

4 Problema. Sea X un espacio topológico compacto, sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Borel sobre X y sea $\mu \colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ una medida tal que $\mu(U) > 0$ para cada conjunto abierto no vacío U del espacio X. Sea $f \in C(X, \mathbb{C})$. Demuestre que $\mathcal{ER}(f)$ coincide con $f[X]$.

5 Problema (casi todos los elementos del dominio se mandan al rango esencial)**.** Sea $A = \mathbb{C} \setminus \mathcal{ER}(f)$. Demuestre que

$$\mu\Big(\{x \in X \colon \ f(x) \in A\} \Big) = 0.$$

6 Problema (el rango esencial es no vacío, si la medida del dominio no es cero)**.** Supongamos que $\mu(X) > 0$. Demuestre que $\mathcal{ER}(f) \neq \varnothing$.

7 Problema (el rango esencial del producto de una función por un escalar)**.** Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\mathcal{ER}(\lambda f) = \lambda \, \mathcal{ER}(f).$$

8 Problema (el rango esencial de la suma de dos funciones)**.** Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que

$$\mathcal{ER}(f + g) \subseteq \operatorname{cl}(\mathcal{ER}(f) + \mathcal{ER}(g)).$$