El rango esencial de una función medible (tarea adicional)

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$.

1. Definición (rango esencial de una función medible definida en un espacio de medida). Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. El *rango esencial* de f se define como el conjunto de todos los números $v \in \mathbb{C}$ tales que para cada $\varepsilon > 0$ la preimagen del disco $\{z \in \mathbb{C}\colon\ |z - v| < \varepsilon\}$ respecto a la función f tiene medida positiva:

$$\mathcal{ER}(f) \coloneqq \{v \in \mathbb{C}\colon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mu(\{x \in X\colon \quad |f(x) - v| < \varepsilon\}) > 0\}.$$

2. Ejemplo. Sea X un espacio topológico, sea $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Borel sobre X y sea $\mu\colon \mathcal{F} \to [0, +\infty]$ una medida tal que $\mu(U) > 0$ para cada conjunto abierto no vacío U del espacio X. Sea $f \in C(X, \mathbb{C})$. Demuestre que $\mathcal{ER}(f)$ coincide con $f[X]$.

3. El rango esencial es cerrado. Demuestre que $\mathcal{ER}(f)$ es un subconjunto cerrado del contradominio $\mathbb{C}$.

4. Casi todos los elementos del dominio se mandan al rango esencial. Sea $A = \mathbb{C} \setminus \mathcal{ER}(f)$. Demuestre que

$$\mu(\{x \in X\colon\ f(x) \in A\}) = 0.$$

5. El rango esencial es no vacío, si la medida del dominio no es cero. Suponiendo que $\mu(X) > 0$ demuestre que $\mathcal{ER}(f) \neq \varnothing$.

6. El rango esencial del producto de una función por un escalar. Sea $\lambda \in \mathbb{C}$. Demuestre que

$$\mathcal{ER}(\lambda f) = \lambda\, \mathcal{ER}(f).$$

7. El rango esencial de la suma de dos funciones. Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$. Demuestre que

$$\mathcal{ER}(f + g) \subset \mathrm{cl}(\mathcal{ER}(f) + \mathcal{ER}(g)).$$