Conjuntos equipotentes

1 Definición. Sea A y B conjuntos. Se dice que A y B son *equipotentes* y se escribe $A \sim B$, si existe una función biyectiva $A \to B$.

2 Proposición. *La equipotencia de conjuntos tiene las siguientes propiedades.*

1. *Sea A un conjunto. Entonces $A \sim A$.*

2. *Sean A y B conjuntos tales que $A \sim B$. Entonces $B \sim A$.*

3. *Sean A, B y C conjuntos tales que $A \sim B$ y $B \sim C$. Entonces $A \sim C$.*

3 Ejemplo. Consideremos los conjuntos

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} = \{k \in \mathbb{Z}\colon\ k \ge 1\}, \qquad \mathbb{N}_2 = \{2, 3, 4, \ldots\} = \{k \in \mathbb{Z}\colon\ k \ge 2\}.$$

Definimos $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}_2$ mediante la regla $f(k) \coloneqq k + 1$. Entonces f es una biyección. Por lo tanto, $\mathbb{N} \sim \mathbb{N}_2$.

4 Ejemplo. $\mathbb{N} \sim 5\mathbb{N}$, donde $5\mathbb{N} = \{5n\colon n \in \mathbb{N}\}$. Una biyección entre estos conjuntos está dada por $f(n) = 5n$.

5 Ejemplo. $\{3, \ldots, 7\} \sim \{1, \ldots, 5\}$. Una biyección entre estos conjuntos es $f(n) = n - 2$.

6 Ejercicio. Demuestre que $(3, +\infty) \sim \mathbb{R}$.

7 Ejemplo. $\{1, 2, 3, 4\} \sim \mathcal{P}(\{7, 8\}) = \{\varnothing, \{7\}, \{8\}, \{7, 8\}\}$. Una biyección está dada por

$$f(1) = \varnothing, \quad f(2) = \{7\}, \quad f(3) = \{8\}, \quad f(4) = \{7, 8\}.$$

8 Ejemplo. Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Entonces $(a, b) \sim (0, 1)$. Una biyección está dada por

$$f(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

9 Ejemplo. $\mathbb{R} \sim (0, +\infty)$. Una biyección está dada por

$$f(x) = \mathrm{e}^x .$$

10 Ejemplo. $\mathbb{R} \sim (0, 1)$. Una biyección está dada por

$$f(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x + 1}.$$

Otra biyección está dada por

$$g(x) = \frac{1}{\pi} \arctan(x) + \frac{1}{2}.$$

11 Proposición (sobre la imagen de una inyección)**.** *Sea $f\colon X \to Y$ una función inyectiva. Entonces la función $g\colon X \to f[X]$, definida mediante la regla $g(x) \coloneqq f(x)$, es biyectiva, y $X \sim f[X]$.*

Demostración. Primero notemos que para cada x en X el punto $f(x)$ pertenece a $f[X]$, así que g realmente toma valores en el codominio declarado, es decir, en $f[X]$.

Si $x_1, x_2 \in X$ y $x_1 \neq x_2$, entonces $g(x_1) = f(x_1) \neq f(x_2) = g(x_2)$, así que g es inyectiva.

Si $y \in f[X]$, entonces existe x en X tal que $y = f(x)$. Pero $f(x) = g(x)$. Hemos mostrado que g es suprayectiva. □

12 Proposición (sobre la unión disjunta de dos biyecciones)**.** *Sean A, B, C, D conjuntos, $A \cap B = \varnothing$, $C \cap D = \varnothing$, y sean $\varphi\colon A \to C$, $\psi\colon B \to D$ biyecciones. Definimos $f\colon A \cup B \to C \cup D$ mediante la regla*

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} \varphi(x), & x \in A; \\ \psi(x), & x \in B. \end{cases}$$

Entonces f es una biyección.

Demostración. Primero notamos que la definición de f es consistente. Si $x \in A \cup B$, entonces, gracias a la condición que $A \cap B = \varnothing$, se cumple exactamente una de las dos condiciones $x \in A$ o $x \in B$. Además, $f(x) \in C \cup D$.

Definimos $g\colon C \cup D \to A \cup B$ mediante la regla

$$g(y) \coloneqq \begin{cases} \varphi^{-1}(y), & y \in C; \\ \psi^{-1}(y), & y \in D. \end{cases}$$

Probemos que $g \circ f = \mathrm{id}_{A \cup B}$. Sea $x \in A \cup B$. Si $x \in A$, entonces $f(x) = \varphi(x) \in C$, y

$$g(f(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x.$$

Si $x \in B$, entonces $f(x) = \psi(x) \in D$, y

$$g(f(x)) = \psi^{-1}(\psi(x)) = x.$$

En ambos casos, $g(f(x)) = x$. Hemos demostrado que $g \circ f = \mathrm{id}_{A \cup B}$. De manera similar se prueba que $f \circ g = \mathrm{id}_{C \cup D}$. □

13 Corolario. *Sean A, B, C, D conjuntos, $A \cap B = \varnothing$, $C \cap D = \varnothing$, $A \sim C$, $B \sim D$. Entonces $A \cup B \sim C \cup D$.*

14 Proposición (sobre la compresión de una biyección)**.** *Sea* $f\colon X \to Y$ *una biyección y sea* $A \subseteq X$*. Pongamos* $B := f[A]$ *y definimos* $g\colon A \to B$ *mediante la regla* $g(x) := f(x)$*. Entonces* g *es una biyección del conjunto* A *sobre el conjunto* B*.*

Demostración. Mostremos que g es inyectiva. Si $u, v \in A$ y $u \neq v$, entonces $f(u) \neq f(v)$, esto es, $g(u) \neq g(v)$.

Mostremos que g es suprayectiva. Si $w \in B$, entonces existe u en A tal que $f(u) = w$. Luego tenemos $g(u) = w$. □

15 Proposición (sobre la compresión de una biyección por medio de una eliminación unipuntual)**.** *Sea* $f\colon X \to Y$ *una biyección y sea* $p \in X$*. Pongamos* $q = f(p)$*. Entonces* $f[X \setminus \{p\}] = Y \setminus \{q\}$*, y la función* $g\colon X \setminus \{p\} \to Y \setminus \{q\}$*, definida mediante la regla* $g(x) := f(x)$*, es una biyección.*

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $x \neq p$. Entonces $f(x) \neq f(p)$, así que $f(x) \in Y \setminus \{q\}$.

Al revés, sea $y \in Y$, $y \neq q$. Pongamos $x := f^{-1}(y)$. Como f^{-1} es una biyección, obtenemos $x \neq p$.

Hemos mostrado que $f[X \setminus \{p\}] = Y \setminus \{q\}$. El resto sale de la Proposición 14. □

16 Ejemplo. Sean $A = [-5, -4] \cup \mathbb{N}$, $B = [-5, -4] \cup \mathbb{N}_2$. Definimos $f\colon A \to B$ mediante la regla

$$f(x) := \begin{cases} x, & x \in [-5, -4]; \\ x + 1, & x \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Entonces f es una biyección, luego $A \sim B$.

17 Ejercicio. Demuestre que $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$. Indicación: separar $\mathbb{N}$ en números pares e impares.

El siguiente ejercicio es más complicado que los anteriores. Para su solución se recomienda usar la idea del Ejemplo 16.

18 Ejercicio. Demuestre que $[0, 1] \sim [0, 1)$.