Ejercicios simples para prepararse a los primeros temas de Análisis Real

Egor Maximenko

Estos “egorcicios” son muy simples, tienen indicaciones detalladas y espacios para llenar.

ESFM del IPN
Ciudad de México
Enero de 2020

Índice

1. Operaciones lógicas principales: negación, conjunción y disyunción

Definiciones informales.

$\neg A$	es verdadera	$\iff$	A	es falsa			
$A \wedge B$	es verdadera	$\iff$	A	es verdadera	**y**	B	es verdadera
$A \vee B$	es verdadera	$\iff$	A	es verdadera	**o**	B	es verdadera

La palabra *o* se usa aquí en el sentido *no exclusivo*: si ambas A y B son verdaderas, entonces $A \vee B$ también.

1.1. Dibuje con flechitas las correspondencias entre las notaciones y sus significados:

$\boxed{A \wedge B}$ $\qquad$ $\boxed{\text{por lo menos una de las proposiciones } A \text{ y } B \text{ es verdadera}}$

$\boxed{A \vee B}$ $\qquad$ $\boxed{\text{ambas proposiciones } A \text{ y } B \text{ son verdaderas}}$

Tablas de verdad

Tablas de verdad para la Negación y la Conjunción. La operación unaria Negación y la operación binaria Conjunción se definen mediante las siguientes tablas de verdad (escribimos 0 para Falso y 1 para Verdadero):

A	$\neg A$
0	1
1	0

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

La negación de A también se denota por $\bar{A}$.

1.2. Tabla de verdad para la Disyunción. Rellene la tabla de verdad para la operación binaria Disyunción ($\vee$).

A	B	$A \vee B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

Cálculo de los valores de expresiones lógicas

1.3. Recuerde las definiciones informales de las operaciones $\neg$, $\wedge$ y $\vee$:

$$\begin{array}{rll} \neg A & \text{es verdadera} & \Longleftrightarrow \\ A \wedge B & \text{es verdadera} & \Longleftrightarrow \\ A \vee B & \text{es verdadera} & \Longleftrightarrow \end{array}$$

1.4. Repaso. Llene las tablas de verdad las cuales sirven como definiciones formales de las operaciones $\neg$, $\wedge$ y $\vee$:

A	$\neg A$
0	
1	

A	B	$A \wedge B$
0	0	
0	1	
1	0	
1	1	

A	B	$A \vee B$

Ejemplo. Calcule el valor de la expresión

$$(a \wedge b) \vee (\neg a)$$

si $a = 0$ y $b = 0$.

Solución. La conjunción $a \wedge b$ es 1 sólo en el caso si ambas a y b son 1. En nuestro ejemplo no es así, por lo tanto

$$a \wedge b = 0 \wedge 0 = 0.$$

Como $a = 0$, por definición de $\neg a$ tenemos que

$$\neg a = \neg 0 = 1.$$

Para calcular $(a \wedge b) \vee (\neg a)$ recordamos que la disyunción tiene valor 1 cuando *por lo menos* uno de sus argumentos es 1. En nuestro caso $\neg a = 1$, así que

$$(a \wedge b) \vee (\neg a) = 0 \vee 1 = 1.$$

Por supuesto, en vez de recordar de las definiciones informales de las operaciones $\neg$, $\wedge$ y $\vee$, uno puede tomar los valores necesarios de sus tablas de verdad. $\square$

1.5. Calcule el valor de la expresión $a \vee (\neg b)$ si $a = 0$ y $b = 1$.

Solución. Primero calculamos $\neg b =$, luego $a \vee (\neg b) =$. $\square$

1.6. Calcule el valor de la expresión $a \wedge (\neg a)$ si $a = 1$.

Solución. $\neg a =$, $a \wedge (\neg a) =$. $\square$

Ejemplos de teoremas de lógica matemática (leyes de dualidad)

Ejemplo. Demostremos que para todo $a \in \{0, 1\}$

$$a \vee (\neg a) = 1.$$

Solución. Calculamos los valores de la expresión $a \vee (\neg a)$ para todos los valores de a. Por supuesto, vamos a aplicar las definiciones de $\vee$ y $\neg$.

Por ejemplo, si $a = 0$, entonces por definición de $\neg$ tenemos que $\neg a = 1$. Para calcular el valor de $a \vee (\neg a)$ notamos que entre las expresiones a y $\neg a$ al menos una (a saber, $\neg a$) tiene valor 1, luego por definición de $\vee$ obtenemos que $a \vee (\neg a) = 1$.

Escribamos los cálculos en forma de tablas de verdad:

a	$\neg a$	$a \vee (\neg a)$
0	1	1
1	0	1

□

1.7. Demuestre que para todo $a \in \{0, 1\}$

$$a \wedge (\neg a) = 0.$$

Solución.

a	$\neg a$	$a \wedge (\neg a)$

□

1.8. Ley de involución para la Negación. Demuestre que para todo $a \in \{0, 1\}$

$$\neg(\neg a) = a.$$

Solución.

a	$\neg a$	$\neg(\neg a)$

□

Leyes de absorción

Vamos a demostrar dos teoremas de lógica matemática que se llaman *leyes de absorción* o *leyes de cancelación*.

Ejemplo. Demostremos que para todos $a, b \in \{0, 1\}$

$$(a \wedge b) \vee a = a.$$

Solución. Tenemos que calcular los valores de la expresión $(a \wedge b) \vee a$ para todo par ordenado de los valores de a y b.

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \vee a$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

Al fin podemos ver que los contenidos de las columnas a y $(a \wedge b) \vee a$ coinciden:

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \vee a$
0	0	0	0
0	1	0	0
1	0	0	1
1	1	1	1

□

1.9. Demuestre que para todos $a, b \in \{0, 1\}$

$$(a \vee b) \wedge a = a.$$

Solución.

a	b	$a \vee b$	$(a \vee b) \wedge a$

□

Leyes de De Morgan

1.10. Demuestre que para todos $a, b \in \{0, 1\}$

$$\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}.$$

Solución.

a	b	$a \vee b$	$\overline{a \vee b}$	$\overline{a}$	$\overline{b}$	$\overline{a} \wedge \overline{b}$
0	0					
0	1					
1	0					
1	1					

□

1.11. Demuestre que para todos $a, b \in \{0, 1\}$

$$\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}.$$

Solución.

a	b					

□

1.12. Divida las siguientes cuatro proposiciones en dos pares de proposiciones equivalentes:

(i) no es cierto que se ambas proposiciones A y B son verdaderas;

(ii) no es cierto que es verdadera por lo menos una de las proposiciones A o B;

(iii) ambas proposiciones A y B son falsas;

(iv) por lo menos una de las proposiciones A y B es falsa.

Asociatividad

1.13. Asociatividad de la conjunción. Demuestre que para todos $a, b, c \in \{0, 1\}$,

$$(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c).$$

Demostración.

a	b	c	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \wedge c$	$b \wedge c$	$a \wedge (b \wedge c)$
0	0	0				
0	0	1				
0	1	0				
0	1	1				
1	0	0				
1	0	1				
1	1	0				
1	1	1				

□

1.14. Asociatividad de la disyunción. Demuestre que para todos $a, b, c \in \{0, 1\}$,

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c).$$

Demostración.

a	b	c				

□

Notación. Las leyes de asociatividad permiten escribir $a \wedge b \wedge c$ en lugar de $(a \wedge b) \wedge c$ y $a \vee b \vee c$ en lugar de $(a \vee b) \vee c$.

1.15. Dibuje con flechitas las correspondencias entre las fórmulas y sus significados:

$A \wedge B \wedge C$ todas las tres proposiciones A, B y C son verdaderas

$A \vee B \vee C$ por lo menos una de las proposiciones A, B y C es verdadera

2. Cuantificadores sobre conjuntos finitos (ejemplos)

Objetivos. Repasar el concepto de cuantificadores en el caso de un dominio finito.

En los ejemplos vamos a usar relaciones binarias, por eso primero repasamos rápidamente el concepto del producto cartesiano de conjuntos finitos.

Producto directo (producto cartesiano) de dos conjuntos

2.1. Pares ordenados (listas de dos elementos) y pares no ordenados (conjuntos de dos elementos). Para cada una de las siguientes afirmaciones determine si esta es verdadera o falsa:

- $(3, 4) = (4, 3)$
- $(2\sqrt{5}, 3) = (\sqrt{20}, \log_2 8)$
- $\{3, 4\} = \{4, 3\}$

Definición (producto cartesiano). Sean A y B conjuntos. El producto cartesiano de los conjuntos A y B, denotado por $A \times B$, se define como el conjunto de todos los pares ordenados que tienen forma (a, b), donde $a \in A$ y $b \in B$.

Ejemplo. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $B = \{\sqrt{2}, \sqrt{7}\}$. Entonces

$$A \times B = \{(1, \sqrt{2}), (1, \sqrt{7}), (2, \sqrt{2}), (2, \sqrt{7}), (3, \sqrt{2}), (3, \sqrt{7})\}.$$

2.2. Número de elementos en el producto cartesiano. Sean A y B conjuntos finitos que contienen m y n elementos respectivamente:

$$|A| = m, \qquad |B| = n.$$

¿Cuántos elementos contiene el producto cartesiano $A \times B$?

Cuadrado cartesiano de un conjunto

Notación. Sea A un conjunto. Entonces el producto cartesiano $A \times A$ se llama *cuadrado cartesiano* de A y se denota por A^2.

2.3. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Escriba todos los elementos de A^2.

2.4. Sea A un conjunto finito de n elementos. ¿Cuántos elementos contiene A^2?

Relaciones binarias

Definición (relación binaria sobre un conjunto). Una *relación binaria* sobre un conjunto X (en otras palabras, una relación binaria entre los elementos del conjunto X) se define como un subconjunto del "cuadrado cartesiano" $X^2 = X \times X$.

Ejemplo. Si X es un conjunto finito, entonces una relación binaria sobre X se puede dibujar como una tabla. Por ejemplo, el siguiente dibujo representa la relación binaria $R = \{(1,2),(1,3),(3,1)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3\}$:

	1	2	3
1		$\times$	$\times$
2			
3	$\times$		

2.5. Represente con un dibujo la relación binaria $R = \{(1,3),(2,1),(2,2),(2,4),(4,3)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3,4\}$.

Solución.

	1	2	3	4
1				
2				
3				
4				

□

Demostrar proposiciones de la forma $\forall \boldsymbol{x}\ \boldsymbol{P}(\boldsymbol{x})$

Ejemplo. Se considera la relación binaria $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3\}$. Dibujar R como una tabla y demostrar que

$$\forall j \in \{1,2,3\} \qquad (3,j) \in R.$$

Dar una interpretación de esta afirmación en términos de las entradas de la tabla.

Solución.

	1	2	3
1	$\times$	$\times$	
2	$\times$		
3	$\times$	$\times$	$\times$

La relación R contiene todas las entradas de la tercera fila de la tabla. En otras palabras, la tercera fila está completamente en R:

$$(3,1),(3,2),(3,3) \in R.$$

$\square$

2.6. Dibuje la relación $R = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,1),(3,2)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3\}$ como una tabla.

	1	2	3
1			
2			
3			

2.7. Sea R la relación binaria del ejercicio anterior. Demuestre que

$$\forall i \in \{1,2,3\} \qquad (i,2) \in R.$$

Dé una interpretación de esta afirmación en términos de las entradas de la tabla.

Demostrar proposiciones de la forma $\exists x\ P(x)$

Ejemplo. Se considera la relación binaria $R = \{(2,1),(2,3),(3,2),(3,3)\}$ sobre el conjunto $X = \{1,2,3\}$. Dibujar R como una tabla y demostrar que

$$\exists j \in \{1,2,3\} \qquad (2,j) \in R.$$

Dar una interpretación de esta afirmación en términos de las entradas de la tabla.

Primera solución. $(2,3) \in R$. Con palabras: En la segunda fila de la tabla hay por lo menos una entrada marcada, es decir, por lo menos un elemento de R.

	1	2	3
1			
2	×		×
3		×	×

□

Segunda solución. $(2,1) \in R$.

	1	2	3
1			
2	×		×
3		×	×

□

2.8. Se considera la relación binaria $R = \{(1,3),(2,1),(2,3)\}$ sobre el conjunto $\{1,2,3\}$. Dibuje R como una tabla y demuestre que

$$\exists i \in \{1,2,3\} \qquad (i,3) \in R.$$

Dé una interpretación de esta afirmación en términos de las entradas de la tabla.

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

Refutar proposiciones de la forma $\forall x\ P(x)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)\}$. Demostrar que la siguiente afirmación es falsa:

$$\forall i \in X \qquad (i, 2) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1		$\times$	
2	$\times$		$\times$
3		$\times$	

La afirmación dice que todos los elementos de la segunda columna están en R. Pero en realidad

$$(2, 2) \notin R,$$

así que **no todos** los elementos de la segunda columna están en R. $\square$

2.9. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Refute la siguiente proposición:

$$\forall j \in X \qquad (3, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

2.10. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Refute la siguiente proposición:

$$\forall i \in X \qquad (i, 1) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Refutar proposiciones de la forma $\exists x\ P(x)$

Ejemplo. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(2,3)\}$. Refutar la siguiente proposición:

$$\exists j \in X \qquad (3,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	×		×
2		×	×
3			

La proposición dice que en el tercer renglón hay al menos un elemento de R. Pero en realidad

$$(3,1) \notin R, \qquad (3,2) \notin R, \qquad (3,3) \notin R,$$

así que en el tercer renglón **no hay ningún** elemento de R. □

2.11. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,3),(2,1),(3,3)\}$. Demuestre que la siguiente proposición es falsa:

$$\exists i \in X \qquad (i,2) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

2.12. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(2,1),(2,3),(3,1),(3,2)\}$. Refute la siguiente proposición:

$$\exists j \in X \qquad (1,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

En los siguientes ejercicios se trata de una relación binaria R sobre un conjunto finito X. La relación R está dibujada como una tabla.

Ejemplo. ¿Cómo demostrar una proposición de la forma $\forall x \in X \quad P(x)$?

- ✓ verificar que para todos los elementos x de X se cumple $P(x)$
- ○ verificar que para ningún elemento x de X se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual no se cumple $P(x)$

2.13. ¿Cómo demostrar una proposición de la forma $\exists x \in X \quad P(x)$?

- ○ verificar que para todos los elementos x de X se cumple $P(x)$
- ○ verificar que para ningún elemento x de X se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual no se cumple $P(x)$

2.14. ¿Cómo refutar una proposición de la forma $\forall x \in X \quad P(x)$?

- ○ verificar que para todos los elementos x de X se cumple $P(x)$
- ○ verificar que para ningún elemento x de X se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual no se cumple $P(x)$

2.15. ¿Cómo refutar una proposición de la forma $\exists x \in X \quad P(x)$?

- ○ verificar que para todos los elementos x de X se cumple $P(x)$
- ○ verificar que para ningún elemento x de X se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual se cumple $P(x)$
- ○ encontrar un elemento x de X para el cual no se cumple $P(x)$

Leyes de De Morgan para los cuantificadores

2.16. Notaciones y sus significados. Indique con flechitas las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\boxed{\overline{\forall x \in X \quad P(x)}}$	para todo $x \in X$ no se cumple $P(x)$
$\boxed{\overline{\exists x \in X \quad P(x)}}$	existe al menos un $x \in X$ para el cual no se cumple $P(x)$
$\boxed{\forall x \in X \quad \overline{P(x)}}$	no es cierto que para todo $x \in X$ se cumple $P(x)$
$\boxed{\exists x \in X \quad \overline{P(x)}}$	no es cierto que para algún $x \in X$ se cumple $P(x)$

2.17. Leyes de De Morgan. Indique con flechitas dos pares de proposiciones equivalentes:

$\boxed{\overline{\forall x \in X \quad P(x)}}$	$\boxed{\forall x \in X \quad \overline{P(x)}}$
$\boxed{\overline{\exists x \in X \quad P(x)}}$	$\boxed{\exists x \in X \quad \overline{P(x)}}$

Demostrar o refutar afirmaciones de la forma $\forall x\ P(x)$

Ejemplo. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,3),(2,2),(3,1)\}$. Demostrar o refutar la siguiente afirmación:

$$\forall i \in X \quad (i,1) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$		$\times$
2		$\times$	
3	$\times$		

Tenemos por determinar, si todas las entradas de la primera columna están en R o no.

Vemos que no todas. Por ejemplo, $(2,1) \notin R$.

Conclusión: la afirmación es falsa. En realidad,

$$\exists i \in X \quad (i,1) \notin R.$$

□

2.18. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,3),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3)\}$. Dibuje R como una tabla.

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

Consideremos los mismos X y R que en el ejercicio anterior. Para cada una de las siguientes tres afirmaciones determine si esta es verdadera o falsa.

2.19. $\forall j \in X \qquad (2,j) \in R.$

2.20. $\forall i \in X \qquad (i,3) \in R.$

2.21. $\forall j \in X \qquad (1,j) \in R.$

Demostrar o refutar afirmaciones de la forma $\exists x\ P(x)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (3, 3)\}$. Demostrar o refutar la siguiente afirmación:

$$\exists j \in X \quad (2, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1		$\times$	
2			
3			$\times$

Tenemos por determinar, si hay o no algún elemento de R en el segundo renglón.

Se ve de la tabla que ningún elemento del segundo renglón pertenece a R:

$$(2, 1) \notin R, \quad (2, 2) \notin R, \quad (2, 3) \notin R.$$

Conclusión: La afirmación es falsa. En realidad,

$$\forall j \in X \quad (2, j) \notin R.$$

□

2.22. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(2, 1), (3, 2)\}$. Dibuje R como una tabla.

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

Consideremos los mismos X y R que en el ejercicio anterior. Para cada una de las siguientes tres afirmaciones determine si esta es verdadera o falsa.

2.23. $\exists j \in X \qquad (2, j) \in R.$

2.24. $\exists i \in X \qquad (i, 3) \in R.$

2.25. $\exists j \in X \qquad (1, j) \in R.$

Afirmaciones de las formas $\forall x\ \forall y\ P(x,y)$ y $\exists x\ \exists y\ P(x,y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,2),(3,3)\}$. Determinar si la siguiente afirmación es verdadera o falsa:

$$\forall i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución. La afirmación dice que $(i,j) \in R$ para cualesquiera i y j. Pero esto es falso. Por ejemplo, $(2,3) \notin R$.

	1	2	3
1	×	×	×
2	×	×	
3		×	×

□

2.26. Sea $X = \{1,2,3\}$. Construya una relación binaria R sobre X tal que

$$\forall i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

2.27. Sea $X = \{1,2,3\}$. Construya una relación binaria R sobre X tal que

$$\exists i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

Demostrar proposiciones de la forma $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,2),(2,3),(3,1)\}$. Demostrar que

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	×	×	
2			×
3	×		

Hay que mostrar que en cada renglón de la tabla hay por lo menos un elemento de R:

$$(1,1) \in R, \quad (2,3) \in R, \quad (3,1) \in R.$$

$\square$

2.28. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,2),(2,2),(3,1),(3,3)\}$. Demuestre que

$$\forall j \in X \quad \exists i \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

2.29. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,2),(1,3),(2,1),(3,2),(3,3)\}$. Demuestre que

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Refutar proposiciones de la forma $\forall x\ \exists y\ P(x,y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,3),(3,2)\}$. Refutar la siguiente proposición:

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	×		×
2			
3		×	

La proposición dice que en cada renglón de la tabla hay por lo menos un elemento de R. Pero en realidad el segundo renglón no contiene ningún elemento de R:

$$(2,1) \notin R, \quad (2,2) \notin R, \quad (2,3) \notin R.$$

□

2.30. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(1,1),(1,2),(2,2),(3,1),(3,2)\}$. Refute la siguiente afirmación:

$$\forall j \in X \quad \exists i \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

2.31. Sea $X = \{1,2,3\}$ y sea $R = \{(2,2),(3,1),(3,2),(3,3)\}$. Refute la siguiente afirmación:

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i,j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

Demostrar o refutar proposiciones de la forma $\forall x\ \exists y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 2)\}$. Demostrar o refutar la siguiente proposición:

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	×		×
2		×	
3		×	

La proposición dice que en cada renglón de la tabla hay por lo menos un elemento de R. En realidad, así es:

$$(1, 1) \in R, \quad (2, 2) \in R, \quad (3, 2) \in R. \qquad \square$$

2.32. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Demuestre o refute la siguiente afirmación:

$$\forall i \in X \quad \exists j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

2.33. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$. Demuestre o refute la siguiente afirmación:

$$\forall j \in X \quad \exists i \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Demostrar proposiciones de la forma $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Demostrar que

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$		
2	$\times$	$\times$	$\times$
3	$\times$		$\times$

La proposición dice que hay un renglón que completamente está en R. En realidad, todas las entradas del segundo renglón están en R:

$$(2, 1) \in R, \quad (2, 2) \in R, \quad (2, 3) \in R. \qquad \square$$

2.34. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2)\}$. Demuestre la siguiente proposición:

$$\exists j \in X \quad \forall i \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

2.35. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Demuestre la siguiente proposición:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

$\square$

Refutar proposiciones de la forma $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 3)\}$. Demostrar que la siguiente afirmación es falsa:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	×		×
2		×	
3	×		×

La proposición dice que hay un renglón que completamente está en R. Pero en realidad ninguno de los renglones está completamente en R. En cada renglón hay al menos una entrada que no pertenece a R:

$$(1, 2) \notin R, \quad (2, 3) \notin R, \quad (3, 2) \notin R.$$

□

2.36. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$. Demuestre que la siguiente proposición es falsa:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

2.37. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Demuestre que la siguiente proposición es falsa:

$$\exists j \in X \quad \forall i \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

En los siguientes ejercicios se trata de una relación binaria R sobre un conjunto finito X. La relación R está dibujada como una tabla.

Ejemplo. ¿Cómo demostrar una proposición de la forma $\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad P(x, y)$?

- ✓ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que se cumple $P(x, y)$
- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x, y)$

2.38. ¿Cómo demostrar una proposición de la forma $\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad P(x, y)$?

- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que se cumple $P(x, y)$
- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x, y)$

2.39. ¿Cómo refutar una proposición de la forma $\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad P(x, y)$?

- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que se cumple $P(x, y)$
- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x, y)$

2.40. ¿Cómo refutar una proposición de la forma $\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad P(x, y)$?

- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que se cumple $P(x, y)$
- ○ para todo elemento $x \in X$ encontrar un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x, y)$
- ○ encontrar un elemento $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x, y)$

2.41. Notaciones y sus significados. Indique con flechitas las correspondencias exactas entre las notaciones y sus significados:

$\overline{\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad P(x,y)}$	para todo $x \in X$ existe un $y \in X$ tal que no se cumple $P(x,y)$
$\overline{\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad P(x,y)}$	existe al menos un $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ no se cumple $P(x,y)$
$\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad \overline{P(x,y)}$	no es cierto que existe un $x \in X$ tal que para todo $y \in X$ se cumple $P(x,y)$
$\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad \overline{P(x,y)}$	no es cierto que para todo $x \in X$ existe un $y \in X$ tal que se cumple $P(x,y)$

2.42. Indique con flechitas dos pares de proposiciones equivalentes:

$\overline{\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad P(x,y)}$	$\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad \overline{P(x,y)}$
$\overline{\exists x \in X \quad \forall y \in X \quad P(x,y)}$	$\forall x \in X \quad \exists y \in X \quad \overline{P(x,y)}$

Demostrar o refutar proposiciones de la forma $\exists x\ \forall y\ P(x, y)$

Ejemplo. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Demostrar o refutar la siguiente proposición:

$$\exists j \in X \quad \forall i \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1	$\times$		$\times$
2	$\times$	$\times$	$\times$
3	$\times$		$\times$

La proposición dice que hay una columna que completamente está en R. En efecto, todas las entradas de la primera columna están en R:

$$(1, 1) \in R, \quad (2, 1) \in R, \quad (3, 1) \in R.$$

También la tercera columna está en R. □

2.43. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 3)\}$. Determine si la siguiente proposición es verdadera o falsa:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

2.44. Sea $X = \{1, 2, 3\}$ y sea $R = \{(1, 1), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$. Demuestre o refute la siguiente proposición:

$$\exists i \in X \quad \forall j \in X \qquad (i, j) \in R.$$

Solución.

	1	2	3
1			
2			
3			

□

3. Operaciones con conjuntos

Ejemplo: Definición de la diferencia de conjuntos.
Sean A y B conjuntos. Entonces

$$A \setminus B \coloneqq \{x\colon\ x \in A \quad \wedge \quad x \notin B\}.$$

Esto significa que para todo x tenemos la siguiente equivalencia:

$$x \in A \setminus B \qquad \Longleftrightarrow \qquad x \in A \quad \wedge \quad x \notin B.$$

3.1. Definición de la unión de conjuntos.
Sean A y B conjuntos. Entonces

$$A \cup B \coloneqq \{x\colon \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}.$$

3.2. Definición de la intersección de conjuntos.
Sean A y B conjuntos. Entonces

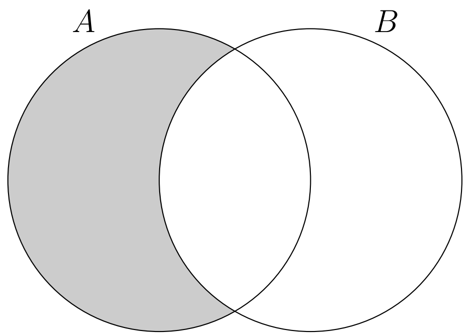
$$A \cap B \coloneqq \{x\colon \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \}.$$

3.3. Indique las correspondencias con flechitas:

$x \in A \cup B$	x pertenece a ambos conjuntos A y B
$x \in A \cap B$	x pertenece al conjunto A pero no pertenece a B
$x \in A \setminus B$	x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos A y B

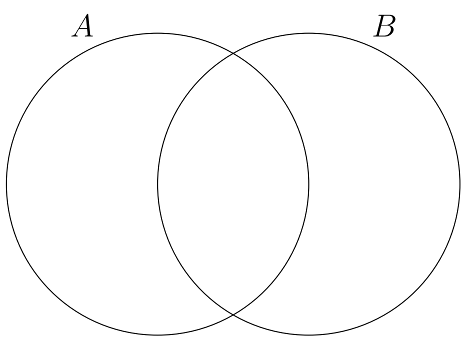
Diagramas de Euler-Venn

Ejemplo: Diferencia de conjuntos.



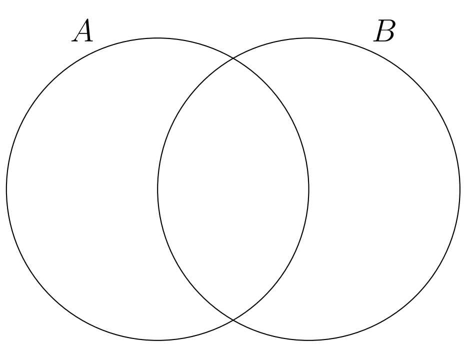
$A \setminus B$ consiste de todos los puntos
que pertenecen al conjunto A
y al mismo tiempo
no pertenecen al conjunto B.

3.4. Unión de conjuntos.



$A \cup B$ consiste de todos los puntos ...

3.5. Intersección de conjuntos.



$A \cap B$ consiste de todos los puntos ...

Relaciones de contención entre la intersección, la unión y los conjuntos originales

Cómo demostrar la contención de un conjunto en el otro. Sean A y B conjuntos. Se dice que A *está contenido* en B si cualquier elemento del conjunto A pertenece también al conjunto B. Formalmente esto significa que para cualquier x la afirmación $x \in A$ implica la afirmación $x \in B$.

Ejemplo. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demostrar que

$$A \cap B \subseteq A.$$

Solución. Plan de la demostración: considerar un elemento arbitrario del conjunto $A \cap B$ y demostrar que este elemento pertenece al conjunto A.

Sea $x \in A \cap B$.
Por definición de la intersección esto significa que $x \in A$ y $x \in B$.
En particular, esto implica que $x \in A$. □

3.6. En la demostración anterior se usa la regla lógica

$$(a \quad \wedge \quad b) \quad \to \quad a.$$

Demuestre esta regla usando tablas de verdad.

Solución.

a	b	$a \wedge b$	$(a \wedge b) \to a$
0	0		
0	1		
1	0		
1	1		

□

3.7. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Demuestre que

$$A \subseteq A \cup B.$$

Indique que regla lógica se usa en la demostración y demuéstrela con tablas de verdad.

Propiedades distributivas

Igualdad de conjuntos. Dos conjuntos A y B son *iguales* si consisten de los mismos elementos. Formalmente esto significa que para un x arbitrario las afirmaciones $x \in A$ y $x \in B$ son equivalentes.

Ejemplo (propiedad distributiva de la unión sobre la intersección). Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demostrar que

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

Solución. Para un x arbitrario tenemos la siguiente cadena de equivalencias:

$$\begin{aligned}
x \in A \cup (B \cap C) \quad &\overset{\text{(i)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in A \quad \vee \quad (x \in B \cap C) \\
&\overset{\text{(ii)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in A \quad \vee \quad (x \in B \quad \wedge \quad x \in C) \\
&\overset{\text{(iii)}}{\Longleftrightarrow} \quad \big((x \in A) \vee (x \in B)\big) \wedge \big((x \in A) \vee (x \in C)\big) \\
&\overset{\text{(iv)}}{\Longleftrightarrow} \quad (x \in A \cup B) \wedge (x \in A \cup C) \\
&\overset{\text{(v)}}{\Longleftrightarrow} \quad x \in (A \cup B) \cap (A \cup C).
\end{aligned}$$

En los pasos (i) y (iv) se usa la definición de la unión,
en los pasos (ii) y (v) se usa la definición de la intersección,
y en el paso (iii) se aplica la propiedad distributiva de la disyunción sobre conjunción:

$$a \ \vee \ \big(b \ \wedge \ c\big) = \big(a \ \vee \ b\big) \ \wedge \ \big(a \ \vee \ c\big). \qquad \square$$

3.8. Propiedad distributiva de la intersección sobre la unión. Sean A, B y C conjuntos arbitrarios. Demuestre que

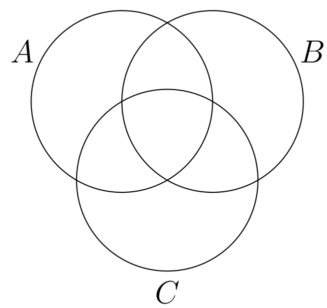
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

Propiedades distributivas y diagramas de Euler-Venn

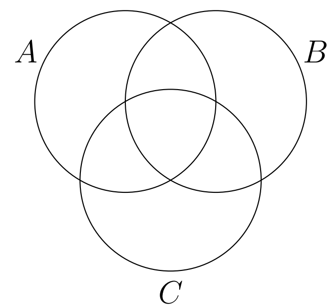
En los siguientes ejercicios hay que sombrear los conjuntos indicados.

3.9.

$B \cap C$

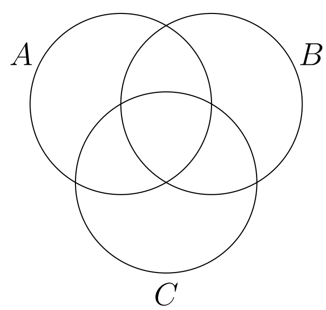


$A \cup (B \cap C)$

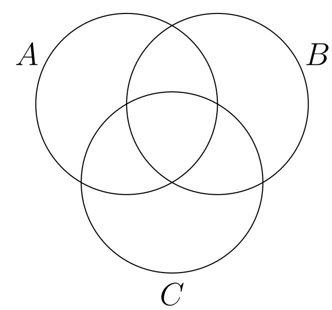


3.10.

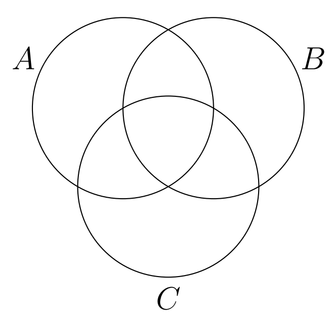
$A \cup B$



$A \cup C$



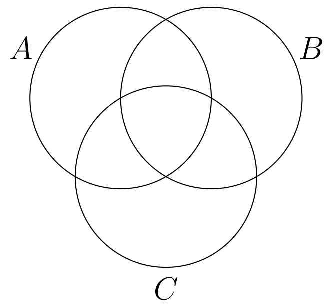
$(A \cup B) \cap (A \cup C)$



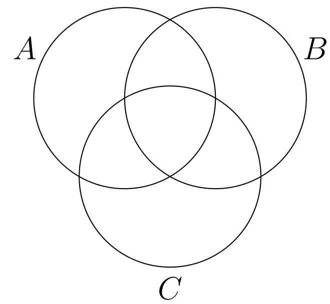
En los siguientes ejercicios hay que sombrear los conjuntos indicados.

3.11.

$B \cup C$

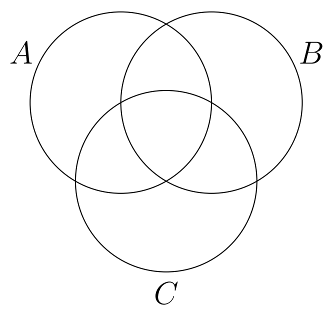


$A \cap (B \cup C)$

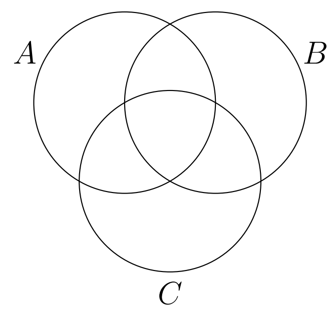


3.12.

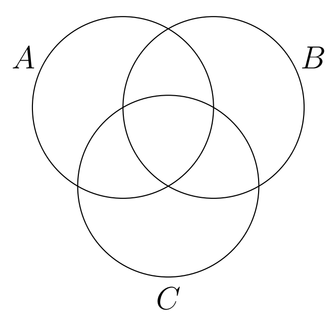
$A \cap B$



$A \cap C$



$(A \cap B) \cup (A \cap C)$



Criterio de que un conjunto está contenido en el otro

Teorema. Sean A y B conjuntos arbitrarios. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) $A \subseteq B$;

(b) $A \cap B = A$;

(c) $A \cup B = B$;

(d) $A \setminus B = \emptyset$.

La demostración se divide en los siguientes ejercicios.

3.13. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \subseteq B$. Demuestre que $A \cap B = A$.

3.14. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \subseteq B$. Demuestre que $A \cup B = B$.

3.15. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \subseteq B$. Demuestre que $A \setminus B = \emptyset$.

3.16. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \cap B = A$. Demuestre que $A \subseteq B$.

3.17. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \cup B = B$. Demuestre que $A \subseteq B$.

3.18. Sean A y B conjuntos arbitrarios tales que $A \setminus B = \emptyset$. Demuestre que $A \subseteq B$.

4. Imágenes y preimágenes de conjuntos finitos

Objetivos. Conocer los conceptos de la imagen de un conjunto bajo una función y de la preimagen de un conjunto bajo una función.

Requisitos. Concepto de la función, concepto del conjunto, definición de conjuntos por propiedades de sus elementos, lógica de predicados.

Definición de la preimagen de un conjunto bajo una función. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea B un subconjunto de su contradominio, es decir $B \subseteq Y$. Entonces la *preimagen* del conjunto B bajo la función f se define como el conjunto de todos los puntos $x \in X$ que la función f manda en B:

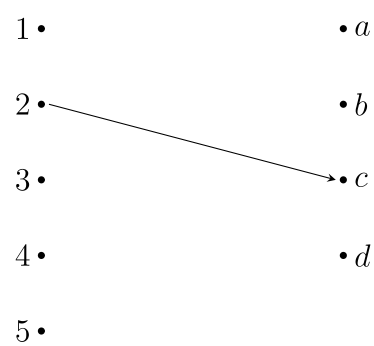
$$f^{-1}[B] := \{x \in X\colon \quad f(x) \in B\}.$$

No confundan el concepto de la preimagen con el concepto de la función inversa. En la definición de la preimagen la función f es arbitraria, no necesariamente invertible.

4.1. Consideremos la función $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d\}$ definida mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$f(1) = a, \qquad f(2) = c, \qquad f(3) = c, \qquad f(4) = c, \qquad f(5) = d.$$

Represente f con flechitas:



4.2. Calcule $f^{-1}[B]$, si f es la función del ejercicio 4.1 y $B = \{b,c,d\}$.

Solución. Para cada $x \in X$ determinamos si $f(x)$ pertenece al conjunto B o no.

$$\begin{array}{lcl}
f(1) = a \notin B, & \Longrightarrow & 1 \notin f^{-1}[B] \\
f(2) = c \in B & \Longrightarrow & 2 \in f^{-1}[B] \\
f(3) = & & \\
f(4) = & & \\
f(5) = & &
\end{array}$$

Respuesta: $f^{-1}[\{b,c,d\}] = \{2, \qquad\qquad \}$. $\square$

Definición de la imagen de un conjunto bajo una función. Sea $f\colon X \to Y$ una función y sea A un subconjunto de su dominio, es decir $A \subseteq X$. Entonces la *imagen* del conjunto A bajo la función f se define como el conjunto de todos los puntos $y \in Y$ que se pueden obtener como imágenes de los puntos del conjunto A bajo la función f:

$$f[A] \coloneqq \{y \in Y\colon \quad \exists x \in A \quad f(x) = y\}.$$

Notemos que la definición de $f[A]$ usa el cuantificador de existencia $\exists$ y por eso no es trivial.

4.3. Se considera la función f del ejercicio 4.1:

$$\begin{array}{lcl} 1\bullet & \qquad\qquad\qquad & \bullet\, a \\ 2\bullet & & \bullet\, b \\ 3\bullet & & \bullet\, c \\ 4\bullet & & \bullet\, d \\ 5\bullet & & \end{array}$$

Calcule $f[A]$ donde $A = \{1, 2, 3\}$.

Primera solución. Para cada elemento $y \in Y$ determinamos si existe un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

para $\quad y = a \quad$ encontramos $\quad x = 1 \in A \quad$ tal que $\quad f(x) = a; \qquad \Longrightarrow \qquad a \in f[A].$

para $\quad y = b \quad$ no hay ningún $\quad x \in A \quad$ tal que $\quad f(x) = b; \qquad \Longrightarrow \qquad b \notin f[A].$

para $\quad y = c$

para $\quad y = d$

Respuesta: $f[\{1, 2, 3\}] = \{a, \qquad \}.$ □

Segunda solución. El conjunto $f[A]$ está formado por los puntos $f(x)$, donde $x \in \{1, 2, 3\}$. Así que

$$f[A] = \big\{f(1), f(2), f(3)\big\} = \big\{a, \quad , \quad \big\}.$$

Simplificamos la respuesta quitando las repeticiones:

$$f[A] = \{ \quad , \quad \}.$$

□

4.4. La función $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d,e\}$ está definida mediante la siguiente regla de correspondencia:

$$f(1) = b, \qquad f(2) = b, \qquad f(3) = d, \qquad f(4) = d, \quad f(5) = d.$$

Represente f con un dibujo:

$1\,\bullet$	$\bullet\, a$
$2\,\bullet$	$\bullet\, b$
$3\,\bullet$	$\bullet\, c$
$4\,\bullet$	$\bullet\, d$
$5\,\bullet$	$\bullet\, e$

4.5. Calcule $f^{-1}[\{a,b,c\}]$.

4.6. Calcule $f^{-1}[\{b\}]$.

4.7. Sea f la misma función que en el ejercicio 4.4:

$$\begin{array}{lcl} 1\bullet & \qquad\qquad\qquad & \bullet\, a \\ 2\bullet & & \bullet\, b \\ 3\bullet & & \bullet\, c \\ 4\bullet & & \bullet\, d \\ 5\bullet & & \bullet\, e \end{array}$$

4.8. Calcule $f[\{3,4,5\}]$ con el primer método.

4.9. Calcule $f[\{3,4,5\}]$ con el segundo método.

4.10. Calcule $f[\{3\}]$.

5. Propiedades de imágenes y preimágenes

Objetivos. Demostrar las propiedades principales de las imágenes y preimágenes, por ejemplo que $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.

Requisitos. Definición y ejemplos de imágenes y preimágenes, lógica de proposiciones, lógica de predicados, operaciones con conjuntos, propiedades de las operaciones con conjuntos.

Lógica de proposiciones (repaso)

5.1. Simplifique: $a \wedge a =$

5.2. Simplifique: $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) =$

5.3. Indique las implicaciones verdaderas:

- ☑ $a \implies (a \vee b)$.
- ☐ $(a \vee b) \implies a$.
- ☐ $a \implies (a \wedge b)$.
- ☐ $(a \wedge b) \implies a$.

Existencia, disyunción y conjunción (repaso)

5.4. Sean P y Q predicados de una variable, es decir afirmaciones que dependen de un parámetro que denotemos por x. Indique las implicaciones verdaderas:

- ☐ $\exists x \quad (P(x) \wedge Q(x)) \implies \big(\exists x\ P(x)\big) \wedge \big(\exists x\ Q(x)\big)$.
- ☐ $\big(\exists x\ P(x)\big) \wedge \big(\exists x\ Q(x)\big) \implies \exists x \quad (P(x) \wedge Q(x))$.
- ☐ $\exists x \quad (P(x) \vee Q(x)) \implies \big(\exists x\ P(x)\big) \vee \big(\exists x\ Q(x)\big)$.
- ☐ $\big(\exists x\ P(x)\big) \vee \big(\exists x\ Q(x)\big) \implies \exists x \quad (P(x) \vee Q(x))$.

5.5. Resumiendo los resultados del ejercicio anterior ponga flechitas correctas ($\iff$ o $\implies$ o $\impliedby$) en lugar de ?:

$$\exists x \quad (P(x) \wedge Q(x)) \qquad ? \qquad \big(\exists x\ P(x)\big) \wedge \big(\exists x\ Q(x)\big)$$

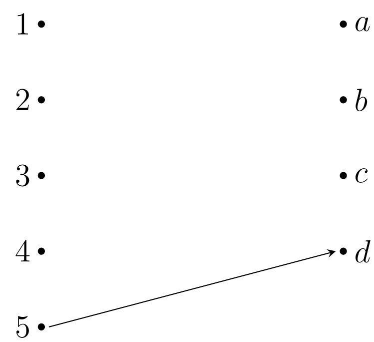
$$\exists x \quad (P(x) \vee Q(x)) \qquad ? \qquad \big(\exists x\ P(x)\big) \vee \big(\exists x\ Q(x)\big)$$

Imagen de un conjunto bajo una función, preimagen de un conjunto bajo una función: repaso de las definiciones

5.6. La función $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d\}$ está definida mediante las siguientes reglas:

$$f(1) = f(4) = b, \qquad f(2) = f(3) = c, \qquad f(5) = d.$$

Represente f con flechitas:



5.7. Determine las imágenes de los conjuntos $\{1,3\}$ y $\{2,3,4\}$ bajo la función f del ejercicio 5.6:

$f[\{1,3\}] =$ $\qquad\qquad$ $f[\{2,3,4\}] =$

5.8. Encuentre las preimágenes (o sea las imágenes inversas) de los conjuntos $\{b,c\}$ y $\{a,d\}$ bajo la función f del ejercicio 5.6:

$f^{-1}[\{b,c\}] =$ $\qquad\qquad$ $f^{-1}[\{a,d\}] =$

Note que $f^{-1}[\ldots]$ es una notación para la preimagen, no confunda con la función inversa. En este ejemplo la función inversa a f no existe, pues f no es inyectiva ni suprayectiva.

Sean X, Y y sea $f\colon X \to Y$ una función.

5.9. Sea $B \subseteq Y$. ¿Qué significa la condición que $x \in f^{-1}[B]$?

$$x \in f^{-1}[B] \qquad \Longleftrightarrow$$

5.10. Sea $A \subseteq X$. ¿Qué significa la condición que $y \in f[A]$?

$$y \in f[A] \qquad \Longleftrightarrow$$

Imagen y preimagen del conjunto vacío

Demostraciones con el conjunto vacío (repaso).

- ¿Cómo demostrar que un conjunto A es vacío?
  Hay que suponer que $x \in A$ y llegar a una contradicción.
- ¿Cómo usar una condición que un conjunto B es vacío?
  Si $B = \emptyset$, entonces para cualquier y la afirmación $y \in B$ es falsa.

5.11. Sea $f\colon X \to Y$ una función. Demuestre que

$$f[\emptyset] = \emptyset.$$

Solución. Razonando por contradicción supongamos que $y \in f[\emptyset]$.

Entonces por la definición de la imagen ...

$\square$

5.12. Sea $f\colon X \to Y$ una función. Demuestre que

$$f^{-1}[\emptyset] = \emptyset.$$

Preimagen de la unión

5.13. ¿Cómo demostrar la igualdad de dos conjuntos? (Repaso). Sean A_1 y A_2 subconjuntos de un conjunto X. ¿Cómo demostrar que $A_1 = A_2$? Indique los métodos correctos:

- ☑ Demostrar que $A_1 \subseteq A_2$ y $A_2 \subseteq A_1$.
- ☐ Demostrar que para todo $x \in X$ la afirmación $x \in A_1$ implica la afirmación $x \in A_2$.
- ☐ Demostrar que para todo $x \in X$ las afirmaciones $x \in A_1$ y $x \in A_2$ son equivalentes.
- ☐ Demostrar que para cualquier $x \in X$ la afirmación $x \in A_1$ implica que $x \in A_2$, y para cualquier $x \in X$ la afirmación $x \notin A_2$ implica que $x \notin A_1$.
- ☐ Demostrar que para cualquier $x \in X$ la afirmación $x \in A_1$ implica que $x \in A_2$, y para cualquier $x \in X$ la afirmación $x \notin A_1$ implica que $x \notin A_2$.

5.14. Sean X, Y conjuntos, sea $f: X \to Y$ una función y sean $B_1, B_2 \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cup B_2] = f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

Solución. Sea x un elemento arbitrario de X. Mostremos que las dos siguientes condiciones son equivalentes:

$$x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] \qquad \iff \qquad x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2].$$

De hecho,

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[B_1 \cup B_2] \quad & \xLeftrightarrow{\text{def. de la preimagen}} \quad f(x) \in \\ & \xLeftrightarrow{\text{def. de la unión}} \\ & \Longleftrightarrow \\ & \Longleftrightarrow \quad x \in f^{-1}[B_1] \cup f^{-1}[B_2]. \end{aligned}$$

□

Preimagen de la intersección

5.15. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sean $B_1, B_2 \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2].$$

Imagen de la unión

5.16. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Demuestre que

$$f[A_1 \cup A_2] = f[A_1] \cup f[A_2].$$

Solución. Sea y un elemento arbitrario de Y. Mostremos que las condiciones

$$y \in f[A_1 \cup A_2] \qquad \text{y} \qquad y \in f[A_1] \cup f[A_2]$$

son equivalentes.

$$y \in f[A_1 \cup A_2]$$

$$\xLeftrightarrow{\text{def. de la imagen}} \quad \exists x \quad \Big((x \in A_1 \cup A_2) \quad \wedge \quad (f(x) = y) \Big)$$

$$\xLeftrightarrow{\text{def. de la unión}} \quad \exists x \quad \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)$$

$$\xLeftrightarrow[]{\substack{\text{prop. distributiva:} \\ (a \vee b) \wedge c = (a \wedge c) \vee (b \wedge c)}} \quad \exists x \quad \Big(\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \Big)$$

$\exists x \ (P(x) \vee Q(x)) \Leftrightarrow$

$$\xLeftrightarrow{\Leftrightarrow}$$

$$\xLeftrightarrow{\text{def. de la imagen}} \quad (\qquad\qquad) \quad \vee \quad (\qquad\qquad)$$

$$\Longleftrightarrow \quad y \in f[A_1] \cup f[A_2].$$

□

Imagen de la intersección

5.17. Recuerde la relación lógica entre las dos siguientes afirmaciones:

$$\exists x \quad \bigl(P(x) \ \land \ Q(x)\bigr) \qquad\qquad \text{y} \qquad\qquad \bigl(\exists x \ P(x)\bigr) \quad \land \quad \bigl(\exists x \ Q(x)\bigr).$$

5.18. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sean $A_1, A_2 \subseteq X$. Demuestre que

$$f[A_1 \cap A_2] \subseteq f[A_1] \cap f[A_2].$$

Ejemplos cuando $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$

5.19. La función $f\colon \{1,2,3,4,5\} \to \{a,b,c,d\}$ está definida mediante las siguientes reglas:

$$f(1) = f(4) = b, \qquad f(2) = f(3) = c, \qquad f(5) = d.$$

$$\begin{array}{lcl}
1\bullet & \qquad\qquad & \bullet\, a \\
2\bullet & & \bullet\, b \\
3\bullet & & \bullet\, c \\
4\bullet & & \bullet\, d \\
5\bullet & &
\end{array}$$

En los siguientes ejercicios se considera la función f del ejercicio 5.19. Se propone construir ejemplos de conjuntos A_1 y A_2 tales que $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$. Para conocer varias situaciones posibles se ponen condiciones adicionales que deben cumplir A_1 y A_2.

5.20. Encuentre conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] = \emptyset \qquad \wedge \qquad f[A_1] = f[A_2] = f[A_1] \cap f[A_2] \neq \emptyset.$$

5.21. Encuentre conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \{1,2,3,4,5\}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] = \emptyset \qquad \wedge \qquad f[A_1] \neq f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] \cap f[A_2] \neq \emptyset.$$

Seguimos considerando la función del ejercicio 5.19 y buscando ejemplos de conjuntos A_1 y A_2 tales que $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$.

$1\,\bullet$	$\bullet\, a$
$2\,\bullet$	$\bullet\, b$
$3\,\bullet$	$\bullet\, c$
$4\,\bullet$	$\bullet\, d$
$5\,\bullet$	

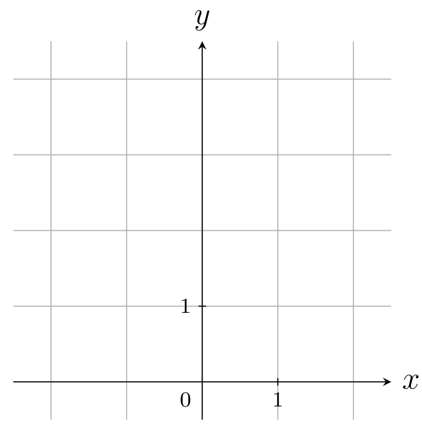
5.22. Encuentre conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq \emptyset \qquad \wedge \qquad f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] \neq f[A_2].$$

5.23. Encuentre conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq \emptyset \qquad \wedge \qquad f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] = f[A_2].$$

5.24. Dibuje la gráfica de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$.



En los siguientes ejercicios se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y se pide construir ejemplos de conjuntos A_1, A_2 tales que $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$. Para conocer varias situaciones posibles se ponen condiciones adicionales.

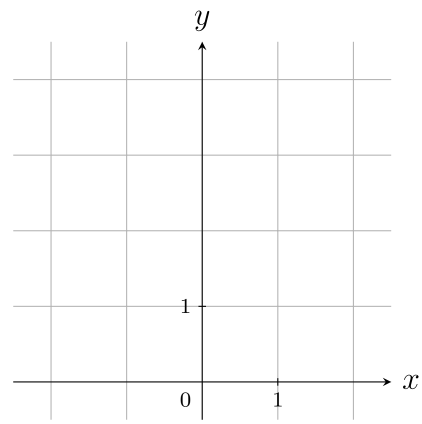
5.25. Construya conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] = \emptyset \qquad \wedge \qquad f[A_1] = f[A_2] = f[A_1] \cap f[A_2] \neq \emptyset.$$

5.26. Construya conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] = \emptyset \qquad \wedge \qquad f[A_1] \neq f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] \cap f[A_2] \neq \emptyset.$$

Seguimos considerando la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ y construyendo ejemplos de conjuntos A_1 y A_2 tales que $f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2]$.



5.27. Construya conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq \emptyset \qquad \wedge \qquad f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] \neq f[A_2].$$

5.28. Construya conjuntos $A_1, A_2 \subseteq \mathbb{R}$ tales que

$$f[A_1 \cap A_2] \neq \emptyset \qquad \wedge \qquad f[A_1 \cap A_2] \neq f[A_1] \cap f[A_2] \qquad \wedge \qquad f[A_1] = f[A_2].$$

Imagen de la preimagen

5.29. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $B \subseteq Y$. Demuestre que

$$f[f^{-1}[B]] \subseteq B.$$

Solución. Sea $y \in f[f^{-1}[B]]$.

Por la definición de la imagen, ...

$\square$

5.30. Construya un ejemplo cuando $f[f^{-1}[B]] \neq B$.

Preimagen de la imagen

5.31. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $A \subseteq X$. Demuestre que

$$A \subseteq f^{-1}[f[A]].$$

5.32. Construya un ejemplo cuando $A \neq f^{-1}[f[A]]$.

6. Imágenes y preimágenes de uniones e intersecciones de familias de conjuntos

Objetivos. Demostrar las fórmulas principales para las imágenes y preimágenes de las uniones e intersecciones de familias de conjuntos.

Requisitos. Imágenes y preimágenes de conjuntos bajo funciones, unión e intersección de una familia de conjuntos, propiedades de los cuantificadores.

6.1. Definición de la unión de una familia de conjuntos. Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces

$$x \in \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ldots$$

6.2. Definición de la intersección de una familia de conjuntos. Sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos. Entonces

$$x \in \bigcap_{i\in I} A_i \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ldots$$

6.3. Definición de la unión y de la intersección. Indique las correspondencias con flechitas:

$\boxed{\exists i \in I \quad x \in C_i}$	x pertenece a todos los conjuntos C_i	$\boxed{x \in \bigcup_{i\in I} C_i}$
$\boxed{\forall i \in I \quad x \in C_i}$	x pertenece por lo menos a uno de los conjuntos C_i	$\boxed{x \in \bigcap_{i\in I} C_i}$

Propiedades de las preimágenes

6.4. Definición de la preimagen (repaso). Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $B \subseteq Y$. Entonces

$$f^{-1}[B] = \{x \in X\colon \underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{?}\}.$$

6.5. Cómo construir razonamientos con preimágenes. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $B \subseteq Y$. Entonces para cualquier $x \in X$ tenemos la siguiente equivalencia:

$$x \in f^{-1}[B] \qquad \Longleftrightarrow \qquad \ldots$$

6.6. Preimagen de la unión de una familia de conjuntos. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $(B_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $B_i \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] = \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Solución. Sea x un elemento arbitrario de X. Vamos a demostrar que son equivalentes las siguientes condiciones:

$$x \in f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] \qquad \xLeftrightarrow{\text{por demostrar}} \qquad x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Construyamos una cadena de equivalencias usando las definiciones de la preimagen y de la unión:

$$x \in f^{-1}\left[\bigcup_{i\in I} B_i\right] \qquad \xLeftrightarrow{\text{por def. de la preimagen}} \qquad \ldots$$

$$\xLeftrightarrow{\text{por def. de la unión}} \qquad \ldots$$

$$\xLeftrightarrow{\text{por def. de la preimagen}} \qquad \ldots$$

$$\xLeftrightarrow{\text{por def. de la unión}} \qquad x \in \bigcup_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

□

6.7. Preimagen de la intersección de una familia de conjuntos. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $(B_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $B_i \subseteq Y$. Demuestre que

$$f^{-1}\left[\bigcap_{i\in I} B_i\right] = \bigcap_{i\in I} f^{-1}[B_i].$$

Propiedades de las imágenes

6.8. Definición de la imagen (repaso). Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $A \subseteq X$. Entonces

$$f[A] = \{y \in Y : \underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}_{?}\}.$$

Repasemos algunas propiedades de los cuantificadores.

6.9. Propiedad conmutativa de los cuantificadores existenciales. Sea P un predicado de dos variables que vamos a denotar por a y b y que pertenecen a algunos conjuntos A y B respectivamente. Establezca una relación lógica ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) entre las siguientes afirmaciones:

$$\exists a \in A \quad \exists b \in B \quad P(a, b) \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \exists b \in B \quad \exists a \in A \quad P(a, b).$$

6.10. Intercambio del cuantificador existencial con el universal. Sea P un predicado de dos variables que vamos a denotar por a y b y que pertenecen a algunos conjuntos A y B respectivamente. Establezca una relación lógica ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) entre las siguientes afirmaciones:

$$\exists a \in A \quad \forall b \in B \quad P(a, b) \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \forall b \in B \quad \exists a \in A \quad P(a, b).$$

6.11. Propiedad de absorción del cuantificador universal. Sea P un predicado de una variable que vamos a denotar por a y que pertenece a un conjunto A, y sea Q una afirmación (no dependiente de a). Establezca una relación lógica ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) entre las siguientes afirmaciones:

$$\Big(\forall a \in A \quad P(a)\Big) \quad \wedge \quad Q \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \forall a \in A \quad \Big(P(a) \quad \wedge \quad Q\Big).$$

6.12. Propiedad de absorción del cuantificador existencial. Sea P un predicado de una variable que vamos a denotar por a y que pertenece a un conjunto A, y sea Q una afirmación (no dependiente de a). Establezca una relación lógica ($\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\Longleftarrow$) entre las siguientes afirmaciones:

$$\Big(\exists a \in A \quad P(a)\Big) \quad \wedge \quad Q \qquad \underbrace{\qquad\qquad}_{?} \qquad \exists a \in A \quad \Big(P(a) \quad \wedge \quad Q\Big).$$

6.13. Imagen de la unión de una familia de conjuntos. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $A_i \subseteq X$. Demuestre que

$$f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] = \bigcup_{i\in I} f[A_i].$$

Solución. Sea y un elemento arbitrario de Y. Vamos a demostrar que son equivalentes las siguientes condiciones:

$$y \in f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] \quad \xLeftrightarrow{\text{por demostrar}} \quad x \in \bigcup_{i\in I} f[A_i].$$

Construyamos una cadena de equivalencias usando las definiciones de la preimagen y de la unión:

$$
\begin{aligned}
y \in f\left[\bigcup_{i\in I} A_i\right] \quad & \xLeftrightarrow{\text{por def. de la imagen}} \quad \exists x \in X \quad \left(x \in \bigcup_{i\in I} A_i \qquad \wedge \qquad\qquad \right) \\
& \xLeftrightarrow{\text{por def. de la unión}} \quad \exists x \in X \quad \Big((\exists i \in I \qquad\qquad) \qquad \wedge \qquad\qquad \Big) \\
& \xLeftrightarrow{\substack{\text{por la propiedad}\\ \text{de absorción}}} \quad \exists x \in X \quad \exists i \in I \quad \Big(\qquad\qquad \wedge \qquad\qquad \Big) \\
& \xLeftrightarrow{\text{intercabio de } \exists \text{ con } \exists} \quad \exists i \in I \quad \exists x \in X \quad \Big(\qquad\qquad \wedge \qquad\qquad \Big) \\
& \xLeftrightarrow{\text{por def. de la imagen}} \quad \exists i \in I \quad y \in \\
& \xLeftrightarrow{\text{por def. de la unión}} \quad y \in \bigcup_{i\in I} f[A_i]. \qquad \square
\end{aligned}
$$

6.14. Imagen de la intersección de una familia de conjuntos. Sean X, Y conjuntos, sea $f\colon X \to Y$ una función y sea $(A_i)_{i\in I}$ una familia de conjuntos tales que $A_i \subseteq X$. Demuestre que

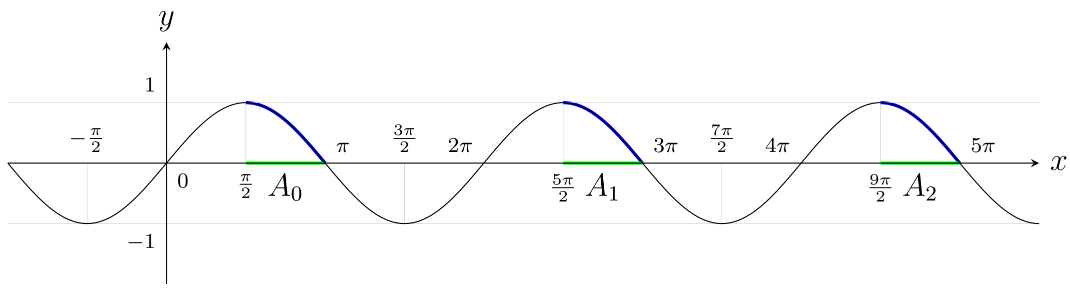
$$f\left[\bigcap_{i\in I} A_i\right] \subseteq \bigcap_{i\in I} f[A_i].$$

Ejemplos cuando la imagen de la intersección no coincide con la intersección de las imágenes

6.15. Ejemplo con la función sen. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{sen}(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Construya una sucesión de conjuntos $A_k \subseteq \mathbb{R}$, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tal que

$$f\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right] \neq \bigcap_{k=0}^{\infty} f[A_k].$$

Solución. Dibujamos la gráfica de la función. Hay muchísimas maneras de elegir los conjuntos A_k que cumplan con la condición requerida. Por ejemplo:



Es decir, pongamos

$$A_0 = \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right], \qquad A_1 = \left[2\pi + \frac{\pi}{2}, 2\pi + \pi\right], \qquad A_2 = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right], \qquad \ldots$$

La fórmula general para los conjuntos A_k:

$$A_k = \left[\qquad\qquad\qquad\qquad\right], \qquad k \in \{0, 1, 2, \ldots\}.$$

En cada uno de los intervalos A_k la función sen decrece y toma valores de 1 a 0, así que

$$f[A_k] = [0, 1].$$

Por lo tanto,

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} f[A_k] = [0, 1].$$

Por otro lado, los intervalos A_k son ajenos y su intersección es $\quad \ldots \quad$:

$$\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k =$$

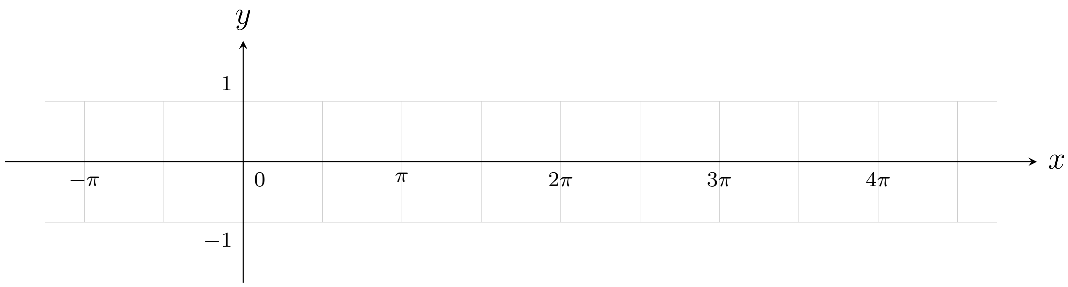
Por consecuencia, la imagen de la intersección también es $\quad \ldots \quad$:

$$f\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right] =$$

□

6.16. Ejemplo con la función cos. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos(x)$. Construya una sucesión de conjuntos A_k, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tal que

$$f\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right] \neq \bigcap_{k=0}^{\infty} f[A_k].$$



6.17. Ejemplo con una función constante. Se considera la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 7$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Construya una sucesión de conjuntos A_k, $k \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, tal que

$$f\left[\bigcap_{k=0}^{\infty} A_k\right] \neq \bigcap_{k=0}^{\infty} f[A_k].$$