Descripción de los espacios duales de $\ell^p(\mathbb{N})$
(un tema del curso “Análisis funcional”)

Egor Maximenko
http://esfm.egormaximenko.com

Instituto Politécnico Nacional (México)
Escuela Superior de Física y Matemáticas

4 de noviembre de 2020

1. Introducción
2. $(\ell^p)' \cong \ell^q,\ 1 \le p < +\infty$
3. $(c_0)' \cong \ell^1$

Plan

1. Introducción
2. $(\ell^p)' \cong \ell^q,\ 1 \leq p < +\infty$
3. $(c_0)' \cong \ell^1$

Objetivos

- Dado un espacio normado V, repasar la definición del espacio dual V'.
- Demostrar que para $1 \leq p < +\infty$, $(\ell^p)' \cong \ell^q$.
- Demostrar que $(c_0)' \cong \ell^1$.

Prerrequisitos

- Funcionales lineales acotados y sus normas.
- La definición del espacio dual de un espacio normado.
- El concepto de isomorfismo isométrico entre espacios normados.
- La desigualdad de Hölder.
- Los espacios ℓ^p, $1 \le p \le +\infty$.
- Los espacios c y c_0.

Criterio de continuidad de un funcional lineal (repaso)

Proposición

Sea V un espacios normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.

(a) f es Lipschitz continuo.

(b) f es uniformemente continuo.

(c) f es continuo.

(d) f es continuo en el punto 0_V.

(e) $\sup\{|f(x)|:\quad x \in V,\quad \|x\|_V \le 1\} < +\infty$.

(f) $f[B_V(0,1)]$ es un conjunto acotado en $\mathbb{C}$.

(g) $\exists C \ge 0 \qquad \forall x \in V \qquad |f(x)| \le C\,\|x\|_V$.

La norma de funcional lineal (repaso)

Proposición

Sea V un espacio normado complejo y sea $f\colon V \to \mathbb{C}$ un funcional lineal.

$$N_1(f) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V \le 1}} |f(x)|, \qquad N_2(f) := \sup_{\substack{x\in V\\ \|x\|_V = 1}} |f(x)|, \qquad N_3(f) := \sup_{\substack{x\in V\\ x\ne 0_V}} \frac{|f(x)|}{\|x\|_V},$$

$$N_4(f) := \inf\{C \in [0,+\infty]\colon \quad \forall x \in V \quad |f(x)| \le C\|x\|_V\}.$$

Entonces $N_1(f) = N_2(f) = N_3(f) = N_4(f)$.

Más aún, el ínfimo en la definición de $N_4(f)$ se alcanza, esto es,

$$\forall x \in V \quad |f(x)| \le N_4(f)\|x\|_V.$$

Funcionales lineales acotados (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

Funcionales lineales acotados (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \ge 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \le C\|x\|_V.$$

Funcionales lineales acotados (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \ge 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \le C\|x\|_V.$$

La norma de un funcional lineal acotado f se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} |f(x)|.$$

Otra notación: $\|f\|_{V\to\mathbb{C}}$, $\|f\|_{V'}$.

Funcionales lineales acotados (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

Un funcional lineal $f\colon V \to \mathbb{C}$ se llama acotado, si existe $C \ge 0$ tal que

$$\forall x \in V \qquad |f(x)| \le C\|x\|_V.$$

La norma de un funcional lineal acotado f se define como

$$\|f\| := \sup_{\substack{x \in V \\ \|x\|_V \le 1}} |f(x)|.$$

Otra notación: $\|f\|_{V \to \mathbb{C}}$, $\|f\|_{V'}$.

Si f es acotado, entonces $\forall x \in V \qquad |f(x)| \le \|T\|\,\|x\|_V.$

El espacio dual de un espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

$$V' := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

El espacio dual de un espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

$$V' := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Operaciones lineales en V':

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda\, f(x) \qquad (x \in V).$$

El espacio dual de un espacio normado (repaso)

Sea V un espacio normado complejo.

$$V' := \mathcal{B}(V, \mathbb{C}).$$

Operaciones lineales en V':

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (\lambda f)(x) := \lambda\, f(x) \qquad (x \in V).$$

Proposición

Sea V un espacio normado real o complejo. Entonces V' es de Banach.

Plan

1. Introducción

2. $(\ell^p)' \cong \ell^q,\ 1 \leq p < +\infty$

3. $(c_0)' \cong \ell^1$

En esta sección suponemos que $1 < p < +\infty$.

Denotemos por q al exponente complementario de p:

$$q := \frac{p}{p-1}.$$

Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

En esta sección suponemos que $1 < p < +\infty$.

Denotemos por q al exponente complementario de p:

$$q := \frac{p}{p-1}.$$

Entonces $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Vamos a demostrar que $(\ell^p)'$ es isométricamente isomorfo a ℓ^q.

Sean $x \in \ell^p$, $a \in \ell^q$. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \le \|a\|_q \, \|x\|_p.$$

Por consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge en $\mathbb{C}$.

Sean $x \in \ell^p$, $a \in \ell^q$. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \le \|a\|_q \, \|x\|_p.$$

Por consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge en $\mathbb{C}$.

Definición del funcional φ_a

Sea $a \in \ell^q$. Definimos $\varphi_a \colon \ell^p \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Sean $x \in \ell^p$, $a \in \ell^q$. Entonces, por la desigualdad de Hölder,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k x_k| \leq \|a\|_q \, \|x\|_p.$$

Por consecuencia, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ converge en $\mathbb{C}$.

Definición del funcional φ_a

Sea $a \in \ell^q$. Definimos $\varphi_a \colon \ell^p \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Por la desigualdad de Hölder, $\varphi_a \in (\ell^p)'$ y $\|\varphi_a\| \leq \|a\|_q$.

Linealidad de φ_a

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Linealidad de φ_a

$$\varphi_a(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Ejercicio. Sean $a \in \ell^q$, $x, y \in \ell^p$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Demostrar que

$$\varphi_a(x+y) = \varphi_a(x) + \varphi_a(y), \qquad \varphi_a(\lambda x) = \lambda\,\varphi_a(x).$$

El signo de un número complejo (repaso)

Para cada z en $\mathbb{C}$,

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

El signo de un número complejo (repaso)

Para cada z en $\mathbb{C}$,

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Si $r > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{sgn}\left(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta}\right) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta}\,.$$

El signo de un número complejo (repaso)

Para cada z en $\mathbb{C}$,

$$\operatorname{sgn}(z) := \begin{cases} \dfrac{z}{|z|}, & z \neq 0; \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Si $r > 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\operatorname{sgn}\big(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta}\big) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\vartheta}\,.$$

Notemos que para cada z en $\mathbb{C}$,

$$z\,\overline{\operatorname{sgn}(z)} = |z|.$$

Proposición (sobre la norma de φ_a)

Sea $a \in \ell^q$. Entonces $\varphi_a \in (\ell^p)'$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|_q$.

Proposición (sobre la norma de φ_a)

Sea $a \in \ell^q$. Entonces $\varphi_a \in (\ell^p)'$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|_q$.

Idea de demostración. Por la desigualdad de Hölder,

$$\|\varphi_a\| = \sup_{x \in \ell^p \setminus \{0_{\mathbb{N}}\}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|_p} \le \sup_{x \in \ell^p \setminus \{0_{\mathbb{N}}\}} \frac{\|a\|_q \, \|x\|_p}{\|x\|_p} = \|a\|_q.$$

Proposición (sobre la norma de φ_a)

Sea $a \in \ell^q$. Entonces $\varphi_a \in (\ell^p)'$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|_q$.

Idea de demostración. Por la desigualdad de Hölder,

$$\|\varphi_a\| = \sup_{x \in \ell^p \setminus \{0_{\mathbb{N}}\}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|_p} \le \sup_{x \in \ell^p \setminus \{0_{\mathbb{N}}\}} \frac{\|a\|_q \, \|x\|_p}{\|x\|_p} = \|a\|_q.$$

Supongamos que $a \neq 0_{\mathbb{N}}$. Definimos $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$y_k := \overline{\operatorname{sgn}(a_k)}\, |a_k|^{q-1}.$$

Proposición (sobre la norma de φ_a)

Sea $a \in \ell^q$. Entonces $\varphi_a \in (\ell^p)'$ y $\|\varphi_a\| = \|a\|_q$.

Idea de demostración. Por la desigualdad de Hölder,

$$\|\varphi_a\| = \sup_{x \in \ell^p \setminus \{0_{\mathbb{N}}\}} \frac{|\varphi_a(x)|}{\|x\|_p} \le \sup_{x \in \ell^p \setminus \{0_{\mathbb{N}}\}} \frac{\|a\|_q \, \|x\|_p}{\|x\|_p} = \|a\|_q.$$

Supongamos que $a \neq 0_{\mathbb{N}}$. Definimos $y \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$,

$$y_k := \overline{\operatorname{sgn}(a_k)}\, |a_k|^{q-1}.$$

Entonces $\quad \|y\|_p = \|a\|_q^{q-1}, \quad \varphi_a(y) = \|a\|_q^q.$

Linealidad respecto al parámetro a

$$\varphi_a(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Linealidad respecto al parámetro a

$$\varphi_a(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Ejercicio. Sean $a, b \in \ell^q$, $\lambda \in \mathbb{C}$.

Demostrar que para cada x en ℓ^p,

$$\varphi_{a+b}(x) = \varphi_a(x) + \varphi_b(x), \qquad \varphi_{\lambda a}(x) = \lambda\, \varphi_a(x).$$

Idea: ¿cómo recuperar a a partir de los valores de φ_a?

$$\varphi_a(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Idea: ¿cómo recuperar a a partir de los valores de φ_a?

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

$$a_k = \varphi_a(\ ???\ ).$$

Idea: ¿cómo recuperar a a partir de los valores de φ_a?

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

$$a_k = \varphi_a(\ ???\ ).$$

$$a_k = \varphi_a(e_k).$$

Los funcionales lineales acotados se recuperan por sus valores en una base de Schauder

Los funcionales lineales acotados se recuperan por sus valores en una base de Schauder

Ejercicio. Sea V un espacio normado complejo y sea $f \in V'$. Sea $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ una base de Schauder de V. Supongamos que $x \in V$,

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k b_k.$$

Demostrar que

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k f(b_k).$$

Indicación: considerar $s_m := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k b_k$.

Proposición

Sea $f \in (\ell^p)'$. Definimos $a \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, $a_j := f(e_j)$. Entonces $a \in \ell^q$ y $f = \varphi_a$.

Idea de demostración.

$$A_m := \sum_{k=1}^{m} |a_k|^q, \qquad y_m := \sum_{j=1}^{m} \overline{\operatorname{sgn}(a_j)}\, |a_j|^{q-1}\, e_j.$$

Entonces $f(y_m) = A_m$, $\|y_m\|_p^p = A_m$,

$$A_m = f(y_m) = |f(y_m)| \le \|f\|\, \|y_m\|_p \le \|f\|\, A_m^{1/p}.$$

Esto implica que $A_m^{1/q} \le \|f\|$ para cada m. Luego $a \in \ell^q$.

Definimos $\Phi\colon \ell^q \to (\ell^p)'$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Definimos $\Phi\colon \ell^q \to (\ell^p)'$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico de espacios de Banach.

Definimos $\Phi\colon \ell^q \to (\ell^p)'$,

$$\Phi(a) := \varphi_a,$$

esto es,

$$\Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico de espacios de Banach.

Hemos demostrado que la definición de Φ es consistente,
que la función Φ es isométrica,
que $\Phi(a+b) = \Phi(a) + \Phi(b)$, $\Phi(\lambda a) = \lambda\Phi(a)$,
y que Φ es suprayectiva.

Ejercicio. Demostrar que $(\ell^1)'$ es isométricamente isomorfo a ℓ^∞.

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

En particular, hay que demostrar lo siguiente:

- Si $a \in \ell^\infty$, entonces $\|\varphi_a\| = \|a\|_\infty$.
- Si $f \in (\ell^1)'$ y $a = (f(e_j))_{j\in\mathbb{N}}$, entonces $\|a\|_\infty = \|f\|$.

Plan

1 Introducción

2 $(\ell^p)' \cong \ell^q$, $1 \leq p < +\infty$

3 $(c_0)' \cong \ell^1$

Proposición

Sea $a \in \ell^1$. Definimos $\varphi_a \colon c_0 \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Entonces $\varphi_a \in (c_0)'$ y $\|\varphi_a\| = \|x\|_1$.

Proposición

Sea $a \in \ell^1$. Definimos $\varphi_a \colon c_0 \to \mathbb{C}$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Entonces $\varphi_a \in (c_0)'$ y $\|\varphi_a\| = \|x\|_1$.

Sugerencia para demostrar que $\|\varphi_a\| \ge \|a\|_1$.

$$y_m := \sum_{j=1}^{m} \overline{\operatorname{sgn}(a_j)}\, e_j = \left(\overline{\operatorname{sgn}(a_1)}, \ldots, \overline{\operatorname{sgn}(a_m)}\, , 0\, , 0\, , \ldots \right).$$

Calcular $|\varphi_a(y_m)|$. Suponiendo $a \ne 0_{\mathbb{N}}$, calcular $\|y_m\|_\infty$ para m grande.

Proposición

Sea $f \in (c_0)'$. Pongamos $a := \big(f(e_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces

$$a \in \ell^1(\mathbb{N}), \qquad f = \varphi_a.$$

Proposición

Sea $f \in (c_0)'$. Pongamos $a := \big(f(e_j)\big)_{j\in\mathbb{N}}$. Entonces

$$a \in \ell^1(\mathbb{N}), \qquad f = \varphi_a.$$

Sugerencia.

$$A_m := \sum_{k=1}^{m} |a_k|, \qquad y_m := \sum_{j=1}^{m} \overline{\operatorname{sgn}(a_j)}\, e_j = \big(\, \overline{\operatorname{sgn}(a_1)}, \ldots, \overline{\operatorname{sgn}(a_m)}\, , 0\, , 0\, , \ldots\, \big).$$

$$A_m = f(y_m) = |f(y_m)| \le \|f\|\, \|y_m\|_\infty \le \|f\|.$$

Definimos $\Phi\colon \ell^1 \to (c_0)'$,

$$\Phi(a) := \varphi_a, \qquad \text{esto es,} \qquad \Phi(a)(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Proposición

Φ es un isomorfismo isométrico.

Ejercicio. Completar todos los detalles de demostración.

El espacio c_0 no es reflexivo

Hemos mostrado (tomando en cuenta los ejercicios) que

$$(c_0)' \cong \ell^1,$$

pero

$$(\ell^1)' \cong \ell^\infty.$$

El espacio bidual $(c_0)''$ no es isométricamente isomorfo a c_0.

El dual del espacio de sucesiones convergentes

Recordamos que

$$c := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad \exists L \in \mathbb{C} \quad \lim_{k \to \infty} x_k = L \right\}.$$

El espacio c se considera con la norma inducida de ℓ^∞.

El dual del espacio de sucesiones convergentes

Recordamos que

$$c := \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \quad \exists L \in \mathbb{C} \quad \lim_{k \to \infty} x_k = L \right\}.$$

El espacio c se considera con la norma inducida de ℓ^∞.

Ejercicio. Demostrar que $c' \cong \ell^1$.

$$\Phi(a)(x) := a_1 \left(\lim_{k \to \infty} x_k \right) + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k+1} x_k.$$

Sobre el dual de ℓ^∞

Para cada a en ℓ^1, podemos definir $\varphi_a \in (\ell^\infty)'$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Sobre el dual de ℓ^∞

Para cada a en ℓ^1, podemos definir $\varphi_a \in (\ell^\infty)'$,

$$\varphi_a(x) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Usando el teorema de Hahn–Banach, es posible demostrar que no todos los elementos de $(\ell^\infty)'$ son de esta forma.

Sobre el dual de ℓ^∞

Para cada a en ℓ^1, podemos definir $\varphi_a \in (\ell^\infty)'$,

$$\varphi_a(x) := \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k.$$

Usando el teorema de Hahn–Banach, es posible demostrar que no todos los elementos de $(\ell^\infty)'$ son de esta forma.

Más aún, es posible demostrar que $(\ell^\infty)'$ no es isométricamente isomorfo a ℓ^1.