Teorema de convergencia dominada de Lebesgue

Objetivos. Demostrar el teorema de convergencia dominada.

Requisitos. Integral de Lebesgue de funciones complejas, lema de Fatou, límite inferior y límite superior de una sucesión.

1 Nota. Ya sabemos que la convergencia puntual $f_n \to g$ no garantiza que $\int f_n \to \int g$ (¡recuerde algún contraejemplo!). El siguiente teorema dice que bajo cierta condición adicional la convergencia puntual implica la convergencia de las integrales. A saber, el teorema pide que las funciones f_n sean *dominadas* por alguna función *integrable*.

2 Teorema (teorema de la convergencia dominada de Lebesgue)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea una $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ tal que:*

(i) f_n converge puntualmente a una función $g\colon X \to \mathbb{C}$.

(ii) Existe una función $h \in \mathcal{L}^1(X, \mu, [0, +\infty])$ tal que $|f_n(x)| \leq h(x)$ para cada x en X.

Entonces $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| \, \mathrm{d}\mu = 0 \tag{1}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_X g \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Repaso de las herramientas que usaremos en la demostración

3 Teorema (lema de Fatou, repaso)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Entonces,*

$$\int_X \left(\liminf_{n\to\infty} f_n\right) \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

4 Proposición (dos propiedades elementales del límite inferior, repaso)**.** *Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales y sea $b \in \mathbb{R}$. Entonces,*

$$\liminf_{n\to\infty}(-a_n) = -\limsup_{n\to\infty} a_n, \qquad \liminf_{n\to\infty}(b + a_n) = b + \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

5 Teorema (acotación del valor absoluto de la integral por la integral del valor absoluto, repaso)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida y sea $f \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C})$. Entonces,*

$$\left| \int_X f \, \mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Demostración del teorema de la convergencia dominada

Demostración. Idea principal: aplicar el Lema de Fatou a la sucesión $2h - |f_n - g|$.

1. Por la segunda suposición del teorema, para cada punto x en X y cada índice n en $\mathbb{N}$ es válida la desigualdad $|f_n(x)| \leq h(x)$. Pasando al límite cuando $n \to \infty$, obtenemos la desigualdad $|g(x)| \leq h(x)$. Luego

$$|f_n - g| \leq |f_n| + |g| \leq 2h.$$

En particular, de estas desigualdades se sigue que

$$f_n, g, |f_n - g| \in \mathcal{L}^1(X, \mu, \mathbb{C}).$$

2. La sucesión de funciones $2h - |f_n - g|$ es positiva. Apliquemos el lema de Fatou a esta sucesión, luego utilicemos propiedades del límite inferior:

$$\begin{aligned}\int_X 2h \,\mathrm{d}\mu = \int_X \left(\liminf_{n\to\infty} (2h - |f_n - g|)\right) \,d\mu &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_X (2h - |f_n - g|) \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_X 2h \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| \,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Notemos que la integral $\int_X 2h \,\mathrm{d}\mu$ es finita. La restamos de ambos lados de la desigualdad:

$$\limsup_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| \,\mathrm{d}\mu \leq 0.$$

Como la sucesión de estas integrales es no negativa, su límite inferior es ≥ 0. Por lo tanto, $\limsup = \liminf = 0$, y obtenemos (1):

$$\lim_{n\to\infty} \int_X |f_n - g| \,\mathrm{d}\mu = 0.$$

3. Sabemos que el valor absoluto de la integral de una función integrable es menor o igual a la integral del valor absoluto de la función. Aplicamos este resultado a la función $f_n - g$:

$$\left| \int_X (f_n - g) \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f_n - g| \,\mathrm{d}\mu,$$

o sea

$$\left| \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu - \int_X g \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_X |f_n - g| \,\mathrm{d}\mu.$$

La sucesión de integrales en el lado derecho tiende a 0. Por lo tanto, la sucesión en el lado izquierdo también tiende a 0. Pero esto significa que se cumple (2). □

Ejemplos

Sugerencia: para resolver los siguientes ejercicios, calcule la función ψ,

$$\psi(x) \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)|.$$

6 Ejemplo. Sea $X = \mathbb{R}$, sea μ la medida de Lebesgue y sean $f_n \coloneqq \chi_{[n,n+1)}$. Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada.

7 Ejemplo. Sea $X = (0, 1]$, sea μ la medida de Lebesgue en $(0, 1]$ y sean $f_n \coloneqq n\chi_{(0,1/n]}$. Explique por qué no se puede aplicar el teorema de la convergencia dominada.

Corolarios y análogos

8 Corolario (teorema de la convergencia uniformemente acotada)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita, sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones puntualmente convergente a una función $g\colon X \to \mathbb{C}$ y sea $C > 0$ tal que $|f_n(x)| \leq C$ para cada x en X y cada n en $\mathbb{C}$. Entonces, $f_n \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$ para cada n en $\mathbb{N}$, $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, y*

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

9 Corolario (teorema de la convergencia uniforme)**.** *Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida finita y sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones uniformemente convergente a una función integrable $g \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, \mathbb{C})$, esto es,*

$$f_n \overset{X}{\Longrightarrow} g \qquad \wedge \qquad \int_X |g| \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_X g \,\mathrm{d}\mu.$$

10 Ejercicio. Muestre con un ejemplo que la condición "$\mu(X) < +\infty$" en el teorema anterior no se puede omitir.

11 Ejercicio. Deduzca el teorema de la convergencia decreciente del teorema de la convergencia dominada.

12 Ejercicio (un análogo del teorema de la convergencia dominada)**.** Sea $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de funciones integrables tal que $f_n \xrightarrow{\mu\text{-c.t.p.}} g$ y $\int_X |f_n| \,\mathrm{d}\mu \to \int |g| \,\mathrm{d}\mu$. Demuestre que

$$\int_X |f_n - g| \,\mathrm{d}\mu \to 0.$$

Sugerencia: revise la demostración del TCD y aplique el lema de Fatou a otra sucesión de funciones.