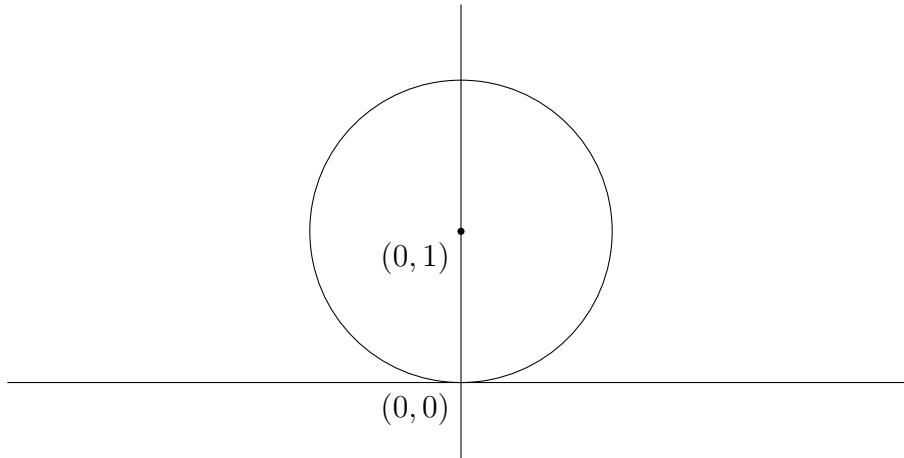


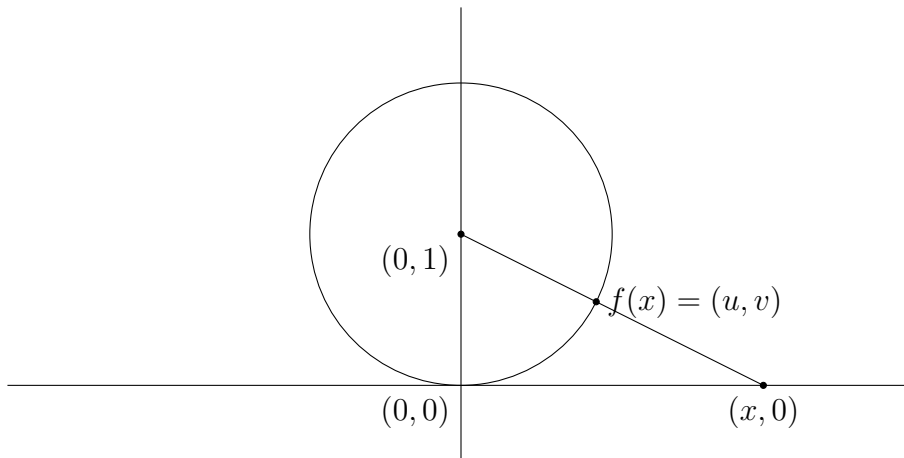
Distancia en el eje real extendido (proyecto o tarea adicional)

1 Ejercicio. En el plano cartesiano consideremos la circunferencia $C((0, 1), 1)$ con centro $(0, 1)$ de radio 1:



Escriba la ecuación de la circunferencia $C((0, 1), 1)$, esto es, escriba una condición necesaria y suficiente para que un punto (u, v) del plano \mathbb{R}^2 pertenezca a $C((0, 1), 1)$.

2 Ejercicio. Para cada punto x en \mathbb{R} denotamos por $f(x)$ al punto de intersección de la circunferencia $C((0, 1), 1)$ con la recta que une los puntos $(x, 0)$ y $(0, 1)$, como está mostrado en el dibujo:



Escriba la ecuación de la recta que une los puntos $(x, 0)$ y $(0, 1)$. En otras palabras, escriba una condición necesaria y suficiente para que un punto (u, v) del plano \mathbb{R}^2 esté en la recta que une los puntos $(x, 0)$ y $(0, 1)$.

3 Ejercicio. Usando los resultados de los Ejercicios 1 y 2 forme un sistema de dos ecuaciones y calcule las coordenadas (u, v) del punto $f(x)$.

4 Ejercicio. Definimos el *eje real extendido* $\overline{\mathbb{R}}$ como $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donde $-\infty, +\infty$ son dos símbolos nuevos que no se usan para otros propósitos. Extendemos el orden común $<$ de números reales al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ poniendo para cualquier $a \in \mathbb{R}$

$$-\infty < a, \quad a < +\infty, \quad -\infty < +\infty.$$

Demuestre que este orden extendido en efecto satisface los axiomas del orden.

5 Ejercicio. Extendemos la función f al dominio $\overline{\mathbb{R}}$ poniendo

$$f(-\infty) := (-1, 1), \quad f(+\infty) := (1, 1).$$

Demuestre que f es inyectiva. Se recomienda demostrar que si $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_1 < x_2$, $(u_1, v_1) = f(x_1)$, $(u_2, v_2) = f(x_2)$, entonces $u_1 < u_2$.

6 Ejercicio. Denotemos por S a la semicircunferencia superior de la circunferencia $C((0, 1), 1)$:

$$S := \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 : (u^2 + (v - 1)^2 = 1) \wedge (v \leq 1)\}.$$

Demuestre que $f(\overline{\mathbb{R}}) = S$. Dado un punto (u, v) en S , hay que construir un punto x en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $f(x) = (u, v)$.

7 Ejercicio. Denotemos por d_2 a la distancia euclideana en el plano \mathbb{R}^2 :

$$d_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}.$$

Muestre que S es un conjunto cerrado en (\mathbb{R}^2, d_2) . Como (\mathbb{R}^2, d_2) es un espacio métrico completo, el subconjunto S dotado con la métrica inducida también es un espacio métrico completo.

8 Ejercicio. Definimos la función $\rho: \overline{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$\rho(x, y) := d_2(f(x), f(y)).$$

Muestre que ρ es una distancia en $\overline{\mathbb{R}}$. Indicación: en este momento no es necesario calcular $\rho(x, y)$ de manera explícita; es suficiente usar el hecho que d_2 es una distancia en \mathbb{R}^2 .

9 Ejercicio. Sean $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Deduzca una fórmula explícita para $\rho(x, y)$. Considere cuatro casos:

- (i) $x, y \in \mathbb{R}$;
- (ii) $x \in \mathbb{R}, y = +\infty$;
- (iii) $x = -\infty, y \in \mathbb{R}$;
- (iv) $x = -\infty, y = +\infty$.

Otros casos son triviales (por ejemplo, $x = y = +\infty$) o similares a los casos listados (por ejemplo, $x = +\infty, y \in \mathbb{R}$).

10 Ejercicio. Demuestre que $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ es un espacio métrico completo.

Intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$

11 Ejercicio. Definimos los intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$ por medio de las fórmulas comunes:

$$(a, b) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : (a < x) \wedge (x < b)\}, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}},$$

$$[a, b) := \{x \in \overline{\mathbb{R}} : (a \leq x) \wedge (x < b)\}, \quad a, b \in \overline{\mathbb{R}},$$

...

Denotemos por \mathcal{G} al conjunto de los intervalos de la forma (a, b) o $(a, +\infty]$ o $[-\infty, b)$ con $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$. Demuestre que la intersección de dos elementos de \mathcal{G} pertenece a \mathcal{G} . Hay que llenar la siguiente tabla de intersecciones:

\cap	(c, d)	$[-\infty, d)$	$(c, +\infty]$
(a, b)			
$(a, +\infty]$			
$[-\infty, b)$			

12 Ejercicio (topología en $\overline{\mathbb{R}}$ generada por los intervalos abiertos). Denotemos por τ al conjunto de todas las uniones posibles de elementos de \mathcal{G} :

$$\tau := \{A \subseteq \overline{\mathbb{R}} : \exists \mathcal{W} \subseteq \mathcal{G} \quad A = \cup \mathcal{W}\}.$$

Usando el resultado del Ejercicio 11 muestre que τ es una topología en $\overline{\mathbb{R}}$.

13 Ejercicio (cada bola en $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ es un intervalo). Para cualesquiera $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$ denotemos por $B_\rho(x, r)$ a la bola con centro x de radio r en el espacio métrico $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$:

$$B_\rho(x, r) := \{y \in \overline{\mathbb{R}} : \rho(x, y) < r\}.$$

- (i) Muestre que $B_\rho(x, r) = (x - r_1(x, r), x + r_2(x, r))$, donde r_1 y r_2 son ciertos números positivos que dependen de x y de r .
- (ii) Muestre que $B_\rho(+\infty, r) = (a(r), +\infty]$, donde $a(r)$ es un número real que depende de r .
- (iii) Muestre que $B_\rho(-\infty, r) = [-\infty, b(r))$, donde $b(r)$ es un número real que depende de r .

14 Ejercicio (vecindades de puntos finitos). Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $A \in \tau$ tal que $x \in A$. Demuestre que existe un $R > 0$ tal que $(x - R, x + R) \subseteq A$.

15 Ejercicio (vecindades del punto $+\infty$). Sea $A \in \tau$ tal que $+\infty \in A$. Demuestre que existe un $R > 0$ tal que $(R, +\infty] \subseteq A$.

16 Ejercicio (vecindades del punto $-\infty$). Sea $A \in \tau$ tal que $-\infty \in A$. Demuestre que existe un $R > 0$ tal que $[-\infty, -R) \subseteq A$.

17 Ejercicio. Sea $A \in \tau$ y sea $x \in A$. Demuestre que existe un número $r > 0$ tal que $B_\rho(x, r) \subseteq A$.

18 Ejercicio. Demuestre que la topología τ coincide con la topología inducida por la métrica ρ .