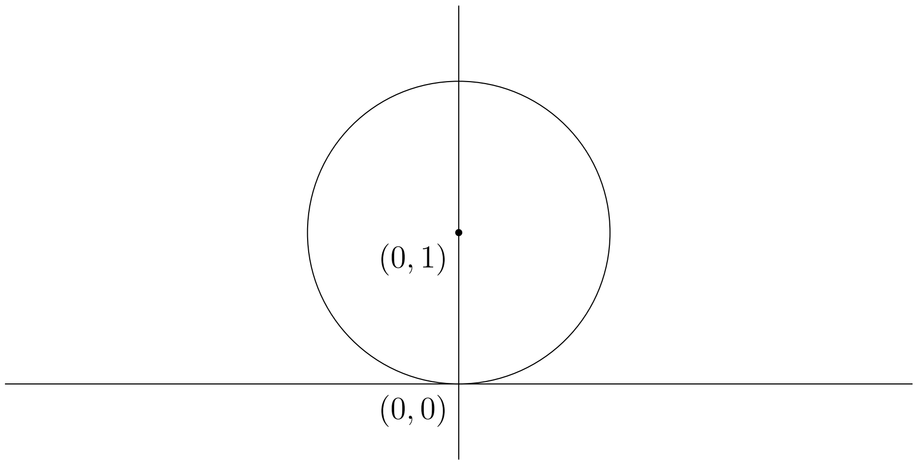
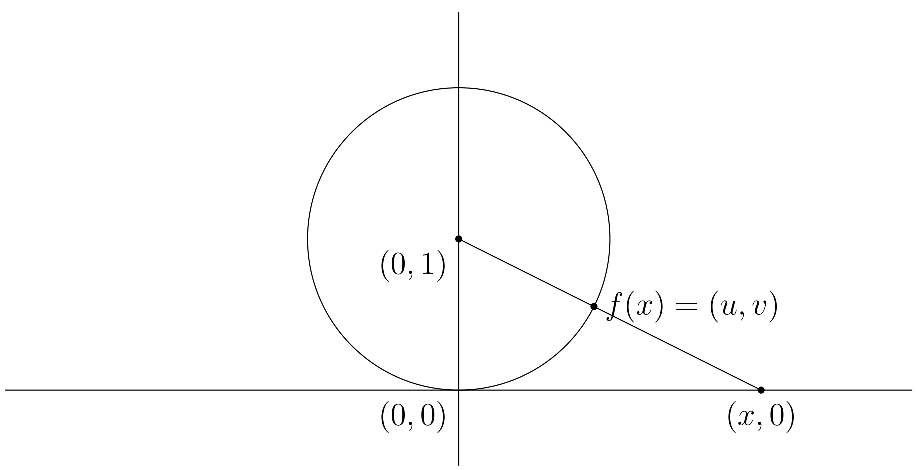
Distancia en el eje real extendido
(tarea adicional)

Ejercicio 1. En el plano cartesiano consideremos la circunferencia $C((0,1),1)$ con centro $(0,1)$ de radio 1:



Escriba la ecuación de la circunferencia $C((0,1),1)$, esto es, escriba una condición necesaria y suficiente para que un punto (u,v) del plano $\mathbb{R}^2$ pertenezca a $C((0,1),1)$.

Ejercicio 2. Para cada punto x en $\mathbb{R}$ denotamos por $f(x)$ al punto de intersección de la circunferencia $C((0,1),1)$ con la recta que une los puntos $(x,0)$ y $(0,1)$, como está mostrado en el dibujo:



Escriba la ecuación de la recta que une los puntos $(x,0)$ y $(0,1)$. En otras palabras, escriba una condición necesaria y suficiente para que un punto (u,v) del plano $\mathbb{R}^2$ esté en la recta que une los puntos $(x,0)$ y $(0,1)$.

Ejercicio 3. Usando los resultados de los Ejercicios 1 y 2 forme un sistema de dos ecuaciones y calcule las coordenadas (u,v) del punto $f(x)$.

Ejercicio 4. Definimos el *eje real extendido* $\overline{\mathbb{R}}$ como $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, donde $-\infty, +\infty$ son dos símbolos nuevos que no se usan para otros propósitos. Extendemos el orden común $<$ de números reales al conjunto $\overline{\mathbb{R}}$ poniendo para caulquier $a \in \mathbb{R}$

$$-\infty < a, \qquad a < +\infty, \qquad -\infty < +\infty.$$

Demuestre que este orden extendido en efecto satisface los axiomas del orden.

Ejercicio 5. Extendemos la función f al dominio $\overline{\mathbb{R}}$ poniendo

$$f(-\infty) := (-1, 1), \qquad f(+\infty) := (1, 1).$$

Demuestre que f es inyectiva. Se recomienda demostrar que si $x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{R}}$, $x_1 < x_2$, $(u_1, v_1) = f(x_1)$, $(u_2, v_2) = f(x_2)$, entonces $u_1 < u_2$.

Ejercicio 6. Denotemos por S a la semicircunferencia superior de la circunferencia $C((0, 1), 1)$:

$$S := \left\{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \colon \ (u^2 + (v-1)^2 = 1) \ \wedge \ (v \le 1)\right\}.$$

Demuestre que $f(\overline{\mathbb{R}}) = S$. Dado un punto (u, v) en S, hay que construir un punto x en $\overline{\mathbb{R}}$ tal que $f(x) = (u, v)$.

Ejercicio 7. Denotemos por d_2 a la distancia euclideana en el plano $\mathbb{R}^2$:

$$d_2((u_1, v_1), (u_2, v_2)) = \sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2}.$$

Muestre que S es un conjunto cerrado en $(\mathbb{R}^2, d_2)$. Como $(\mathbb{R}^2, d_2)$ es un espacio métrico completo, el subconjunto S dotado con la métrica inducida también es un espacio métrico completo.

Ejercicio 8. Definimos la función $\rho \colon \overline{\mathbb{R}}^2 \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula

$$\rho(x, y) := d_2(f(x), f(y)).$$

Muestre que ρ es una distancia en $\mathbb{R}$. Indicación: en este momento no es necesario calcular $\rho(x, y)$ de manera explícita; es suficiente usar el hecho que d_2 es una distancia en $\mathbb{R}^2$.

Ejercicio 9. Sean $x, y \in \overline{\mathbb{R}}^2$. Deduzca una fórmula explícita para $\rho(x, y)$. Considere cuatro casos:

(i) $x, y \in \mathbb{R}$;

(ii) $x \in \mathbb{R}$, $y = +\infty$;

(iii) $x = -\infty$, $y \in \mathbb{R}$;

(iv) $x = -\infty$, $y = +\infty$.

Otros casos son triviales (por ejemplo, $x = y = +\infty$) o similares a los casos listados (por ejemplo, $x = +\infty$, $y \in \mathbb{R}$).

Ejercicio 10. Demuestre que $(\overline{\mathbb{R}}, \rho)$ es un espacio métrico completo.

Intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$

Ejercicio 11. Definimos los intervalos en $\overline{\mathbb{R}}$ por medio de las fórmulas comunes:

$$\begin{aligned} (a,b) &\coloneqq \{x \in \overline{\mathbb{R}}\colon\ (a < x)\ \wedge (x < b)\}, \qquad a,b \in \overline{\mathbb{R}}, \\ [a,b) &\coloneqq \{x \in \overline{\mathbb{R}}\colon\ (a \le x)\ \wedge\ (x < b)\}, \qquad a,b \in \overline{\mathbb{R}}, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Denotemos por $\mathcal{G}$ al conjunto de los intervalos de la forma (a,b) o $(a,+\infty]$ o $[-\infty,b)$ con $a,b \in \mathbb{R}$. Demuestre que la intersección de dos elementos de $\mathcal{G}$ pertenece a $\mathcal{G}$. Hay que llenar la siguiente tabla de intersecciones:

$\bigcap$	(c,d)	$[-\infty,d)$	$(c,+\infty]$
(a,b)			
$(a,+\infty]$			
$[-\infty,b)$			

Ejercicio 12 (topología en $\overline{\mathbb{R}}$ generada por los intervalos abiertos)**.** Denotemos por τ al conjunto de todas las uniones posibles de elementos de $\mathcal{G}$:

$$\tau \coloneqq \{A \subset \overline{\mathbb{R}}\colon\ \exists \mathcal{W} \subset \mathcal{G} \quad A = \cup \mathcal{W}\}.$$

Usando el resultado del Ejercicio 11 muestre que τ es una topología en $\overline{\mathbb{R}}$.

Ejercicio 13 (cada bola en $(\overline{\mathbb{R}},\rho)$ es un intervalo)**.** Para cualesquiera $x \in \overline{\mathbb{R}}$, $r > 0$ denotemos por $B_\rho(x,r)$ a la bola con centro x de radio r en el espacio métrico $(\overline{\mathbb{R}},\rho)$:

$$B_\rho(x,r) \coloneqq \{y \in \overline{\mathbb{R}}\colon\ \rho(x,y) < r\}.$$

(i) Muestre que $B_\rho(x,r) = (x - r_1(x,r), x + r_2(x,r))$, donde r_1 y r_2 son ciertos números positivos que dependen de x y de r.

(ii) Muestre que $B_\rho(+\infty,r) = (a(r),+\infty]$, donde $a(r)$ es un número real que depende de r.

(iii) Muestre que $B_\rho(-\infty,r) = [-\infty,b(r))$, donde $b(r)$ es un número real que depende de r.

Ejercicio 14 (vecindades de puntos finitos)**.** Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $A \in \tau$ tal que $x \in A$. Demuestre que existe un $R > 0$ tal que $(x - R, x + R) \subset A$.

Ejercicio 15 (vecindades del punto $+\infty$)**.** Sea $A \in \tau$ tal que $+\infty \in A$. Demuestre que existe un $R > 0$ tal que $(R,+\infty] \subset A$.

Ejercicio 16 (vecindades del punto $-\infty$)**.** Sea $A \in \tau$ tal que $-\infty \in A$. Demuestre que existe un $R > 0$ tal que $[-\infty,-R) \subset A$.

Ejercicio 17. Sea $A \in \tau$ y sea $x \in A$. Demuestre que existe un número $r > 0$ tal que $B_\rho(x,r) \subset A$.

Ejercicio 18. Demuestre que la topología τ coincide con la topología inducida por la métrica ρ.