La distancia de un punto a un conjunto en espacios métricos

Objetivos. Estudiar propiedades básicas de la función

$$D_A(x) \coloneqq \operatorname*{ínf}_{a\in A} d(a,x),$$

donde A es un subconjunto del espacio métrico X.

Prerrequisitos. Espacio métrico, el ínfimo de un subconjunto de $\mathbb{R}$, el ínfimo de una función.

1 Definición. Sean (X,d) un espacio métrico, $A \subseteq X$. Definimos $D_A\colon X \to [0,+\infty]$,

$$D_A(x) \coloneqq \operatorname*{ínf}_{a\in A} d(x,a).$$

En este tema suponemos que (X,d) es un espacio métrico.

2 Observación. Si $A = \varnothing$, entonces $D_A(x) = +\infty$ para cada x en X. Si $A \neq \varnothing$, entonces $D_A(x) < +\infty$ para cada x en X.

3 Proposición. *Sea $A \subseteq X$ tal que $A \neq \varnothing$. Entonces la función D_A es Lipschitz continua con coeficiente 1, esto es, para cada x,y en X,*

$$|D_A(x) - D_A(y)| \le d(x,y).$$

Demostración. Sean $x,y \in X$. Para cada a en A, por la desigualdad del triángulo,

$$d(x,a) \le d(x,y) + d(y,a).$$

Como $d(x,a) \ge D_A(x)$, obtenemos que

$$D_A(x) \le d(x,y) + d(y,a).$$

Pasamos el sumando $d(x,y)$ al lado izquierdo con el signo negativo:

$$D_A(x) - d(x,y) \le d(y,a).$$

Como a es un elemento arbitrario de A, hemos mostrado que el número $D_A(x) - d(x, y)$ es una cota inferior del conjunto $\{d(y, a)\colon\ a \in A\}$. Por lo tanto,

$$D_A(x) - d(x, y) \le D_A(y),$$

esto es, $D_A(x) - D_A(y) \le d(x, y)$. La desigualdad $D_A(y) - D_A(x) \le d(x, y)$ se demuestra de manera similar. $\square$

4 Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$, $\eta > D_A(x)$. Demostrar que existe a en A tal que $d(x, a) < \eta$.

5 Ejercicio. Sean $A \subseteq X$, $x \in X$. Demostrar que las siguientes dos afirmaciones son equivalentes:

(a) $D_A(x) = 0$;

(b) $x \in \mathrm{cl}(A)$.

Ya sabemos que cada espacio métrico es de Hausdorff. Ahora se propone demostrar la propiedad normal.

6 Ejercicio (cada espacio métrico es normal)**.** Sean P, Q subconjuntos cerrados de X tales que $P \cap Q = \varnothing$. Construir $f \in C(X, [0, 1])$ tal que $f(x) = 0$ para cada x en P y $f(x) = 1$ para cada x en Q. Sugerencias. Primero considerar los casos triviales, cuando $P = \varnothing$ o $Q = \varnothing$. Si $P \neq \varnothing$ y $Q \neq \varnothing$, usar las funciones D_P y D_Q.