La derivada de una función monótona

Objetivos. Demostrar el teorema sobre la derivada de una función monótona.

Requisitos. Lema de Vitali, derivadas de Dini.

Anteriormente hemos definido las derivadas de Dini $(D^+f)(x)$, $(D_+f)(x)$, $(D^-f)(x)$, $(D_-f)(x)$, y hemos estudiado sus propiedades elementales.

El siguiente lema dice que si $v > D_-f(x)$, entonces hay puntos t aribrariamente cercanos a x por la izquierda, tales que $f(x) - f(t) < v(x - t)$.

1. Lema. Sean A un intervalo de $\mathbb{R}$, $f\colon A \to \mathbb{R}$ una función, $x \in A$, $x > \inf(A)$, $v > D_-f(x)$. Entonces para cada $\eta > 0$ existe t en $A \cap (x - \eta, x)$ tal que

$$f(x) - f(t) < v(x - t).$$

Demostración. Recordemos que

$$D_-f(x) = \lim_{\eta \to 0^+} \inf_{t \in A \cap (x-\eta, x)} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} = \sup_{\eta > 0} \inf_{t \in A \cap (x-\eta, x)} \frac{f(x) - f(t)}{x - t}.$$

Como $D_-f(x) < v$, para cada $\eta > 0$ tenemos que

$$\inf_{t \in A \cap (x-\eta, x)} \frac{f(x) - f(t)}{x - t} < v.$$

Luego existe t en $A \cap (x - \eta, x)$ tal que $\frac{f(x)-f(t)}{x-t} < v$, esto es,

$$f(x) - f(t) < v(x - t). \qquad \square$$

2. Teorema (sobre la derivada de una función creciente). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces f es derivable c.t.p.

Demostración. 1. Es suficiente verificar que $D^+f \le D_-f$ y $D^-f \le D_+f$ en c.t.p., porque estas dos desigualdad implican la siguiente cadena de desigualdades:

$$D^+f \le D_-f \le D^-f \le D_+f \le D^+f.$$

Demostremos que $D^+f \le D_-f$ en c.t.p.; la demostración de la desigualdad $D^-f \le D_+f$ es similar. Notemos que

$$\{x \in (a, b)\colon D^+f(x) > D_-f(x)\} = \bigcup_{u,v \in \mathbb{Q}\colon\, u > v} E_{u,v},$$

donde

$$E_{u,v} \coloneqq \{x \in (a,b)\colon \quad D^+f(x) > u \quad \wedge \quad D_-f(x) < v\}.$$

Por eso es suficiente probar que $\mu^*(E_{u,v}) = 0$. Sea $s = \mu^*(E_{u,v})$. Elijamos $\varepsilon > 0$ arbitrario. Usando la definición de la medida externa, elijamos un conjunto G abierto tal que $E_{u,v} \subset G$ y $\mu(G) < s + \varepsilon$.

2. Para todo punto x en $E_{u,v}$, por la definición de $D_-f(x)$, existe un $\delta > 0$ tal que $x - \delta \in G$ y

$$f(x) - f(x - \delta) < v\delta.$$

Más aún, por la definición de $D_-f(x)$, existen δ arbitrariamente pequeños con estas propiedades. Los intervalos $[x-\delta, x]$ que cumplen con estas propiedades forman una cubierta de Vitali de $E_{u,v}$. Usando el Lema de Vitali, elegimos una lista finita $([x_j-\delta_j, x_j])_{1\le j\le m}$ de intervalos disjuntos de esta cubierta tal que $\mu^*\left(E_{u,v} \setminus \bigcup_{j=1}^m [x_j - \delta_j, x_j]\right) < \varepsilon$. Pongamos

$$A \coloneqq E_{u,v} \cap \left(\bigcup_{j=1}^m (x_j - \delta_j, x_j)\right).$$

Entonces $\mu^*(A) > s - \varepsilon$.

3. Para todo y en A, por la definición de $D^+f(y)$, existe un $h > 0$ tal que $y + h$ pertenece al mismo intervalo $(x_j - \delta_j, x_j)$ a cual pertenece y, y

$$f(y + h) - f(y) > uh.$$

Más aún, existen h arbitrariamente pequeños con estas propiedades. Los intervalos $[y, y+h]$ con estas propiedades forman una cubierta de Vitali de A. Sea $([y_k, y_k + h_k])_{1\le k\le n}$ una lista finita de invervalos disjuntos de esta cubierta tal que $\sum_{k=1}^n h_k > s - 2\varepsilon$.

4. Todo invervalo $(y_k, y_k + h_k)$ está contenido en un invervalo $(x_j - \delta_j, x_j)$. Como f es creciente,

$$\sum_{k=1}^n (f(y_k + h_k) - f(y_k)) \le \sum_{j=1}^m (f(x_j + \delta_j) - f(x_j)).$$

Pero

$$\sum_{k=1}^n (f(y_k + h_k) - f(y_k)) > u \sum_{k=1}^n h_k > u(s - 2\varepsilon)$$

y

$$\sum_{j=1}^m (f(x_j) - f(x_j - \delta_j)) < v \sum_{j=1}^m \delta_j \le v\mu(G) < v(s + \varepsilon).$$

Por lo tanto, $u(s-2\varepsilon) < v(s+\varepsilon)$. Como ε es arbitrario, $us \le vs$. Pero $u > v$. Esto implica que $s = 0$. $\square$

3. Proposición (sobre la integral de la derivada de una función creciente). Sean $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, y sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función creciente. Entonces f' es medible y

$$\int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x \le f(b) - f(a).$$

Demostración. Por el teorema, ya sabemos que para casi todo x en (a, b) está bien definida la derivada $f'(x)$. Consideremos la sucesión de funciones $g_n\colon [a, b] \to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) = \begin{cases} n\left(f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)\right), & x + \frac{1}{n} \in [a, b]; \\ 0, & x + \frac{1}{n} > b. \end{cases}$$

Entonces $g_n \to f'$ c.t.p., y f' es medible. Apliquemos el lema de Fatou:

$$\begin{aligned} \int_a^b f'(x)\,\mathrm{d}x &\le \liminf_{n\to\infty} \int_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \liminf_{n\to\infty} \int_a^{b-1/n} g_n(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_a^{b-1/n} f(x + 1/n)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_{a+1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{b-1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \liminf_{n\to\infty} \left(n \int_{b-1/n}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x - n \int_a^{a+1/n} f(x)\,\mathrm{d}x \right) \le f(b) - f(a). \end{aligned}$$

□