La derivada de la integral (el primer teorema de cálculo para funciones Lebesgue integrables)

Objetivos. Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$. Consideremos la *integral indefinida* (o la *integral con límite variable*) de la función f:

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

Vamos a mostrar que en casi todo punto x del intervalo (a,b) la derivada $F'(x)$ existe y coincide con $f(x)$.

Propiedades necesarias de la integral de Lebesgue, repaso

1 Proposición (continuidad de la integral de Lebesgue, repaso)**.** *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y sea $f \in L^1(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$. Entonces para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $Y \in \mathcal{F}$ y $\mu(Y) < \delta$, entonces $\int_Y |f|\,\mathrm{d}\mu < \varepsilon$.*

2 Proposición (¿cuándo la integral de una función positiva es cero?)**.** *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y sea $f \in L^1(X,\mathcal{F},\mu,[0,+\infty])$. Supongamos que $\int_X f\,\mathrm{d}\mu = 0$. Entonces $f = 0$ μ-c.t.p., esto es,*

$$\mu(\{x \in X\colon\ f(x) > 0\}) = 0.$$

Recordemos la idea de demostración: usar la igualdad

$$\{x \in X\colon\ f(x) > 0\} = \bigcup_{q=1}^{\infty} A_q, \qquad \text{donde} \qquad A_q \coloneqq \{x \in X\colon\ f(x) \geq 1/q\}$$

y aplicar la desigualdad de Markov–Chebyshov.

3 Corolario (la integral de una función escrictamente positiva)**.** *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida, con $\mu(X) > 0$, y sea $f \in L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ tal que $f(x) > 0$ para cada x en X. Entonces $\int_X f\,\mathrm{d}\mu > 0$.*

4 Ejercicio. Demostrar el Corolario 3 sin usar la Proposición 2.

Propiedad regular de la medida de Lebesgue, repaso

En el resto de esta sección denotamos por $\mathcal{F}$ la σ-álgebra de Lebesgue en $\mathbb{R}$ y por μ la medida de Lebesgue.

5 Proposición (la medida de Lebesgue es regular por abajo)**.** *Sea $E \in \mathcal{F}$ tal que $\mu(E) < +\infty$, y sea $\varepsilon > 0$. Entonces existe $K \subseteq E$ tal que K es compacto y $\mu(K) > \mu(E) - \varepsilon$.*

Otra forma equivalente de la misma proposición: si $\mu(E) < +\infty$, entonces

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K)\colon\quad K \subseteq E, \quad K \text{ es compacto}\}.$$

Funciones de variación acotada y funciones absolutamente continuas, repaso

Por simplicidad, trabajaremos con funciones reales, aunque muchos resultados se generalizan a funciones complejas.

6 Proposición (las funciones de variación acotada son derivables c.t.p., repaso). *Sea* $F \in \mathrm{BV}([a, b])$. *Entonces* F *es derivable c.t.p.*

Recordemos la idea de demostración: cada función de variación acotada se puede representar como la diferencia de dos funciones crecientes, y las funciones crecientes son derivables c.t.p.

7 Teorema (las funciones absolutamente continuas son de variación acotada, repaso). $\mathrm{AC}([a, b]) \subseteq \mathrm{BV}([a, b])$.

8 Proposición (las funciones absolutamente continuas son continuas, repaso). $\mathrm{AC}([a, b]) \subseteq C([a, b])$.

La integral indefinida es derivable en c.t.p., repaso

9 Proposición (la integral indefinida es absolutamente continua, repaso). *Sea* $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. *Definimos* F *mediante* (1). *Entonces* $F \in \mathrm{AC}([a, b])$.

10 Proposición (la integral indefinida es continua y de variación acotada). *Sea* $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. *Definimos* F *mediante* (1). *Entonces* $F \in C([a, b]) \cap \mathrm{BV}([a, b])$.

Demostración. Aplicar la Proposición 9, el Teorema 7 y la Proposición 8. □

11 Ejercicio. Demostrar la Proposición 10 de manera directa, sin usar la Proposición 9.

12 Corolario (la integral indefinida es derivable c.t.p.). *Sea* $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. *Definimos* F *mediante* (1). *Entonces* F *es derivable c.t.p.*

Demostración. Aplicar las Proposiciones 10 y 6. □

El lema principal sobre integrales indefinidas

13 Lema. *Sea* $f \in L^1([a, b], \mathbb{R})$. *Definimos* F *mediante* (1). *Supongamos que* $F(x) = 0$ *para todo* x *en* $[a, b]$. *Entonces* $f = 0$ *c.t.p. en* $[a, b]$.

Demostración. La hipótesis del lema implica que para todo intervalo $(\alpha, \beta) \subseteq [a, b]$ se cumple

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)\,\mathrm{d}t = F(\beta) - F(\alpha) = 0.$$

La idea principal de la demostración es que todos los subconjuntos medibles de $[a,b]$ se aproximan por uniones finitos o numerables de intervalos.

Sea $E \coloneqq \{x \in [a,b] \colon f(x) > 0\}$. La condición $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$ implica que E es medible. Supongamos que $\mu(E) > 0$. Usando el hecho que la medida de Lebesgue es regular por abajo, elijamos un conjunto compacto K tal que $K \subseteq E$ y $\mu(K) > 0$.

El conjunto $(a,b) \setminus K$ es abierto y se puede escribir como la unión de una familia finita o numerable $((\alpha_n,\beta_n))_{n\in J}$ de intervalos abiertos. De aquí,

$$\int\limits_K f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_a^b f\,\mathrm{d}\mu - \sum_{n\in J} \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

Por otro lado, como $f > 0$ en K y $\mu(K) > 0$, por el Corolario 3 tenemos $\int_K f\,\mathrm{d}\mu > 0$. Esta contradicción muestra que $\mu(E) = 0$. De manera similar se demuestra que

$$\mu(\{x \in [a,b] \colon\ f(x) < 0\}) = 0. \qquad \square$$

Demostración del primer teorema fundamental de cálculo para funciones Lebesgue integrables

Haremos la demostración en tres etapas: primero para $f \in C([a,b])$, luego para $f \in L^\infty([a,b])$, y al final para $f \in L^1([a,b])$.

14 Lema (sobre la derivada de integral indefinida de una función continua)**.** *Sean $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, $c \in [a,b]$. Definimos F por la fórmula 1. Entonces*

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ c+h\in[a,b]}} \left(\frac{1}{h} \int\limits_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t \right) = f(c).$$

Demostración. Recordemos la demostración de este resultado clásico. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la continuidad de f en el punto c encontramos $\delta > 0$ tal que

$$\forall t \in (c-\delta, c+\delta) \cap [a,b] \qquad |f(t) - f(c)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Si $h > 0$ y $c+h \in [a,b]$, entonces para cada t en $[c, c+h]$ tenemos $|t-c| \le h < \delta$. Si $h < 0$ y $c+h \in [a,b]$, entonces para cada t en $[c+h, c]$ tenemos $|t-c| \le |h| < \delta$. En ambos casos,

$$\left| \left(\frac{1}{h} \int\limits_c^{c+h} f(t)\,\mathrm{d}t \right) - f(c) \right| = \left| \frac{1}{h} \int\limits_c^{c+h} (f(t) - f(c))\,\mathrm{d}t \right| \le \frac{1}{|h|} \cdot |h| \cdot \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \qquad \square$$

15 Lema (sobre la derivada de la integral indefinida de una función acotada y medible)**.** *Sea $f \in L^\infty([a,b],\mathbb{R})$. Definimos F por la fórmula 1. Entonces $F'(x) = f(x)$ para c.t.p. x en $[a,b]$.*

Demostración. Por el Corolario 12, la función F es derivable en c.t.p. Sea $K \coloneqq \|f\|_\infty$. Entonces $|f(x)| \le K$ para c.t.p. $x \in [a,b]$. Vamos a “suavizar” la función f. Para cada n en $\mathbb{N}$ definimos $g_n(x)$ como el promedio de f en $[x, x+1/n]$:

$$g_n(x) \coloneqq n \int\limits_x^{x+1/n} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Como $|f| \le K$ c.t.p., tenemos $|g_n(x)| \le K$. Expresemos g_n en términos de F:

$$g_n(x) = n\left(F(x+1/n) - F(x)\right).$$

Por la definición de la derivada, $g_n(x) \to F'(x)$ para casi todo x. Aplicamos el teorema de convergencia acotada:

$$\begin{aligned}\int\limits_a^c F'(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_a^c g_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int\limits_a^c (F(x+h) - F(x))\,\mathrm{d}x\right)\\ &= \lim_{h\to 0}\left(\frac{1}{h}\int\limits_c^{c+h} F(x)\,\mathrm{d}x - \frac{1}{h}\int\limits_a^{a+h} F(x)\,\mathrm{d}x\right) = F(c) - F(a) = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

pues F es continua. Hemos mostrado que

$$\int\limits_a^c (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0 \qquad \forall c \in [a,b].$$

Por el Lema 13, $F' = f$ c.t.p. □

16 Teorema (sobre la derivada de la integral indefinida)**.** *Sea $f \in L^1([a,b],\mathbb{R})$. Definimos F en $[a,b]$ mediante la siguiente regla:*

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Entonces $F'(x) = f(x)$ para c.t.p. x en $[a,b]$.

Demostración. Cada función real se puede escribir como la suma de dos funciones positivas. Por eso, sin pérdida de generalidad, es suficiente considerar el caso cuando $f \ge 0$. Pongamos

$$b_n(x) \coloneqq \begin{cases} f(x), & f(x) \le n;\\ 0, & f(x) > n.\end{cases}$$

Entonces $f - b_n \geq 0$. La función $G_n\colon [a,b] \to \mathbb{R}$,

$$G_n(x) := \int\limits_a^x (f(t) - b_n)\,\mathrm{d}t,$$

es creciente en $[a,b]$. Por eso $G_n'(x) \geq 0$ para c.t.p. $x \in [a,b]$. Por el Lema 15,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_a^x b_n(t)\,\mathrm{d}t = b_n'(x),$$

y

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} G_n(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int\limits_a^x b_n(t)\,\mathrm{d}t \geq b_n(x) \qquad \text{c.t.p.}$$

Como n es arbitrario, $F'(x) \geq f(x)$ c.t.p. Por consecuencia,

$$\int\limits_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Por el teorema sobre la derivada de una función monótona, tenemos también la desigualdad recíproca:

$$\int\limits_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Concluimos que $\int_a^b (F'(x) - f(x))\,\mathrm{d}x = 0$. Como $F' \geq f$, esto implica que $F' = f$ c.t.p. $\square$