La derivada de la integral

1. Objetivo. Sea $f \in L^1([a,b])$. Consideremos la *integral indefinida* (o la *integral con límite variable*) de la función f:

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Vamos a mostrar que en casi todo punto x del intervalo (a,b) la derivada $F'(x)$ existe y coincide con $f(x)$.

2. Lema. Sea $f \in L^1([a,b])$. Entonces la función

$$F(x) \coloneqq \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

es una función continua de variación acotada en $[a,b]$.

Demostración. Ya sabemos que F es continua. Sea $\tau = (\tau_0,\ldots,\tau_m)$ una partición del intervalo $[a,b]$. Entonces

$$\sum_{k=1}^m |F(\tau_k) - F(\tau_{k-1})| \le \sum_{k=1}^m \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} |f(x)|\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1.$$

Tomando sup con respecto a τ en $\mathcal{P}[a,b]$, obtenemos que $\operatorname{Var}_a^b(f) \le \|f\|_1$. □

3. Lema. Sean $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida, con $\mu(X) > 0$, y sea $f \in L^1(X,\mathcal{F},\mu)$ tal que $f(x) > 0$ para cada x en X. Entonces $\int_X f > 0$.

Demostración. Definamos los conjuntos A_n:

$$A_0 \coloneqq \{x \in X\colon\, f(x) \ge 1\}, \qquad A_n \coloneqq \left\{x \in X\colon\, \frac{1}{n+1} \le f(x) < \frac{1}{n}\right\}.$$

Entonces $X = \bigcup_{n=0}^\infty A_n$, $\sum_{k=0}^\infty \mu(A_n) = \mu(X) > 0$, y existe un $n \in \mathbb{N}_0$ tal que $\mu(A_n) > 0$. Por lo tanto

$$\int_X f(x)\,\mathrm{d}x \ge \int_{A_n} f(x)\,\mathrm{d}x \ge \frac{\mu(A_n)}{n+1} > 0.$$ □

4. Lema. Sea $f \in L^1([a,b])$. Supongamos que $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ para todo x en $[a,b]$. Entonces $f = 0$ c.t.p. en $[a,b]$.

Demostración. La hipótesis del lema implica que $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t = 0$ para todo intervalo $(\alpha,\beta) \subset [a,b]$.

Sea $E \coloneqq \{x \in [a,b]\colon f(x) > 0\}$. La condición $f \in L^1([a,b])$ implica que E es medible. Supongamos que $\mu(E) > 0$. Elijamos un conjunto compacto K tal que $K \subseteq E$ y $\mu(K) > 0$.

El conjunto $(a,b) \setminus K$ es abierto y se puede escribir como la unión de una familia finita o numerable $((\alpha_n,\beta_n))_{n\in J}$ de intervalos abiertos. De aquí,

$$\int\limits_K f = \int\limits_a^b f - \sum_{n\in J} \int\limits_{\alpha_n}^{\beta_n} f = 0.$$

Por otro lado, como $f > 0$ en K y $\mu(K) > 0$, existe un $\varepsilon > 0$ tal que $K_\varepsilon \coloneqq \{x \in [a,b]\colon f(x) \ge \varepsilon\}$ tiene medida positiva, y $\int_K f \ge \int_{K_\varepsilon} f \ge \varepsilon \cdot \mu(K_\varepsilon) > 0$. $\square$

5. Lema (derivada de la integral indefinida de una función continua). Sean $F \in C[a,b]$, $c \in [a,b)$. Entonces

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ c+h\in[a,b]}} \left(\frac{1}{h} \int\limits_c^{c+h} F(x)\,dx \right) = F(c).$$

Este resultado clásico se usa en el siguiente lema.

6. Lema (derivada de la integral indefinida de una función acotada y medible). Sean $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y medible. Supongamos que $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt + F(a)$. Entonces $F'(x) = f(x)$ para c.t.p. $x \in [a,b]$.

Demostración. F es de variación acotada en $[a,b]$, y $F'(x)$ existe en c.t.p. $x \in [a,b]$. Sea K un número positivo tal que $|f(x)| \le K$ para todo $x \in [a,b]$. Pongamos

$$f_n(x) \coloneqq n\,(F(x+1/n) - F(x)) = n \int\limits_x^{x+1/n} f(t)\,dt.$$

Usando esta representación concluimos fácilmente que $|f_n(x)| \le K$. Como $f_n \to F'(x)$ en c.t.p., el teorema de convergencia acotada implica que:

$$\begin{aligned}\int\limits_a^c F'(x)\,dx &= \lim \int\limits_a^c f_n(x)\,dx = \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \int\limits_a^c (F(x+h) - F(x))dx \right) \\ &= \lim \left(\frac{1}{h} \int\limits_c^{c+h} F(x)\,dx - \frac{1}{h} \int\limits_a^{a+h} F(x)\,dx \right) = F(c) - F(a) = \int\limits_a^c f(x)\,dx,\end{aligned}$$

pues F es continua. Por esto

$$\int_a^c (F'(x) - f(x))\, dx = 0 \qquad \forall c \in [a, b],$$

y por el lema $F'(x) = f(x)$ c.t.p. $\square$

7. Teorema (derivada de la integral indefinida). Sea $f \in L^1([a, b])$. Definimos F en $[a, b]$ mediante la siguiente regla:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Entonces $F'(x) = f(x)$ para c.t.p. $x \in [a, b]$.

Demostración. S.p.g. podemos suponer que $f(x) \geq 0$. Pongamos

$$b_n(x) \coloneqq \begin{cases} f(x), & f(x) \leq n; \\ 0, & f(x) > n. \end{cases}$$

Entonces $f - b_n \geq 0$, y

$$G_n(x) \coloneqq \int_a^x (f - b_n)$$

es una función creciente en $[a, b]$. Por eso $G_n'(x) \geq 0$ para c.t.p. $x \in [a, b]$. Por el lema anterior, $\frac{d}{dx} \int_a^x b_n = b_n'(x)$, y

$$F'(x) = \frac{d}{dx} G_n(x) + \frac{d}{dx} \int_a^x b_n \geq b_n(x) \qquad \text{c.t.p.}$$

Como n es arbitrario, $F'(x) \geq f(x)$ c.t.p. Por consecuencia,

$$\int_a^b F'(x)\, \mathrm{d}x \geq \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Por el teorema sobre la derivada de una función monótona, tenemos también la desigualdad opuesta:

$$\int_a^b F'(x)\, \mathrm{d}x \leq F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x,$$

y $\int_a^b (F'(x) - f(x))\, \mathrm{d}x = 0$. Como $F'(x) \geq f(x)$, esto implica que $F'(x) = f(x)$ c.t.p. $\square$