Densidad de funciones simples en L^p

Objetivos. Demostrar que las funciones simples p-integrables forman un subconjunto denso en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$, donde $1 \le p < +\infty$.

Requisitos. Definición de los espacios $\mathcal{L}^p$ y L^p, aproximación de funciones medibles positivas por funciones simples, funciones simples medibles que se anulan fuera de un conjunto de medida finita, desigualdad de Márkov–Chebyshov.

1 Definición (repaso: funciones simples medibles que se anulan fuera de un conjunto de medida finita)**.** Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida. Denotamos por $\mathcal{SM}(X,\mathcal{F},\mathbb{C})$ o brevemente por $\mathcal{SM}(X,\mathcal{F})$ al conjunto de las funciones complejas simples y medibles respecto a $\mathcal{F}$. Denotemos por $\mathcal{S}_0(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C})$ o brevemente por $\mathcal{S}_0(X,\mu)$ al siguiente conjunto de funciones:

$$\mathcal{S}_0(X,\mu) \coloneqq \mathcal{S}_0(X,\mathcal{F},\mu,\mathbb{C}) \coloneqq \Big\{ f \in \mathcal{SM}(X,\mathcal{F}) \colon \quad \mu(\{x \in X \colon\ f(x) \ne 0\}) < +\infty \Big\}.$$

2 Ejercicio. Demuestre que $\mathcal{S}_0(X,\mu)$ es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}(X,\mathcal{F})$.

3 Definición. Sea $\widetilde{\mathcal{S}_0}(X,\mu)$ el conjunto de las clases de equivalencia de funciones que pertenecen a $\mathcal{S}_0(X,\mu)$:

$$\widetilde{\mathcal{S}_0}(X,\mu) \coloneqq \big\{ f + \mathcal{Z}(X,\mu) \colon\ f \in \mathcal{S}_0(X,\mu) \big\}.$$

4 Proposición. *Sea* $(X,\mathcal{F},\mu)$ *un espacio de medida y sea* $p \in [1,+\infty)$*. Entonces,*

$$\mathcal{S}_0(X,\mu) = \mathcal{SM}(X,\mathcal{F}) \cap \mathcal{L}^p(X,\mu).$$

Demostración. Sea $f \in \mathcal{SM}(X,\mathcal{F})$. Supongamos que $v_1,\ldots,v_m$ son los valores no nulos de f, y pongamos $v_0 \coloneqq 0$. Para cada k en $\{0,1,\ldots,m\}$, pongamos

$$A_k \coloneqq f^{-1}[\{v_k\}], \qquad \text{esto es,} \qquad A_k = \big\{ x \in X \colon\ f(x) = v_k \big\}.$$

Entonces los conjuntos $A_0, A_1, \ldots, A_m$ son $\mathcal{F}$-medibles. Además, son disjuntos a pares y cubren X. En otras palabras, $(A_0, A_1, \ldots, A_m)$ es una partición generalizada de X. Notemos que el conjunto A_0 puede ser vacío. Como vimos en la teoría de funciones simples medibles,

$$f = \sum_{k=0}^{m} v_k A_k.$$

Es una representación generalizada de la función simple f. Pongamos

$$Y \coloneqq \{x \in X \colon\ f(x) \ne 0\}.$$

Entonces, $Y = \bigcup_{k=1}^{m} A_k$.

Demostremos que $\mathcal{S}_0(X,\mu) \subseteq \mathcal{SM}(X,\mathcal{F}) \cap \mathcal{L}^p(X,\mu)$. Supongamos que $f \in \mathcal{S}_0(X,\mu)$. Entonces, $\mu(A_k) < +\infty$ para cada k en $\{1,\ldots,m\}$. Luego

$$\int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{m} |v_k|^p \mu(A_k) < +\infty.$$

Demostremos que $\mathcal{SM}(X,\mathcal{F}) \cap \mathcal{L}^p(X,\mu) \subseteq \mathcal{S}_0(X,\mu)$. Supongamos que $f \in \mathcal{SM}(X,\mathcal{F}) \cap \mathcal{L}^p(X,\mu)$. Para cada k en $k \in \{1,\ldots,m\}$, aplicamos la desigualdad de Márkov–Chebyshov:

$$\mu(A_k) \le \mu\left(\left\{x \in X\colon\ |f(x)|^p \le |v_k|^p\right\}\right) \le \frac{1}{|v_k|^p} \int_X |f|^p \,\mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Finalmente, concluimos que $\mu(Y) \le \sum_{n=1}^{k} \mu(A_k) < +\infty$. □

5 Teorema (densidad de funciones simples en L^p)**.** *Sea $(X,\mathcal{F},\mu)$ un espacio de medida y sea $p \in [1,+\infty)$. Entones, $\mathcal{S}(X,\mu)$ es denso en $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ y $\widetilde{\mathcal{S}}(X,\mu)$ es denso en $L^p(X,\mu)$.*

Demostración. 1. Sea $f \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ tal que $f \ge 0$. Construimos una sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en $\mathcal{M}(X,\mathcal{F},[0,+\infty))$ tal que los valores de s_n son múltiplos de 2^{-n}, $s_n \le f$ y $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge a f puntualmente. Como $s_n \le f$, obtenemos que $s_n \in \mathcal{L}^p(X,\mu)$ y por lo tanto $s_n \in \mathcal{S}_0(X,\mu)$. Notemos que

$$|s_n - f|^p = (f - s_n)^p \le f^p, \qquad |s_n - f|^p \xrightarrow{X} 0_{X\to\mathbb{C}}.$$

Por el teorema de la convergencia dominada, $N_p(s_n - f) \to 0$ cuando $n \to \infty$.

2. En general, cualquier función de la clase $\mathcal{L}^p(X,\mu)$ se escribe como una combinación lineal de cuatro funciones no negativas. Aplicamos el resultado del inciso 1 a cada una de estas cuatro funciones. Concluimos que $\mathcal{S}_0(X,\mu)$ es denso en el espacio seminormado $\mathcal{L}^p(X,\mu)$.

3. Mostremos que $\widetilde{\mathcal{S}}_0(X,\mu)$ es denso en $L^p(X,\mu)$. Sea $F \in L^p(X,\mu)$ y sea $\varepsilon > 0$. Elegimos $f \in F$. Usando el resultado del inciso 2, encontramos g en $\mathcal{S}_0(X,\mu)$ tal que $N_p(g - f) < \varepsilon$. Pongamos $G \coloneqq g + \mathcal{Z}(X,\mu)$. Entonces $G \in L^p(X,\mu)$ y

$$\|G - F\|_p = N_p(g - f) < \varepsilon.$$ □

6 Observación. Como $L^p(X,\mu)$ es completo y $\widetilde{\mathcal{S}}_0(X,\mu)$ es denso en $L^p(X,\mu)$, el espacio $L^p(X,\mu)$ se puede ver como una completación del espacio vectorial $\widetilde{\mathcal{S}}_0(X,\mu)$ provisto con la restricción de la norma $\|\cdot\|_p$. Esta visión del espacio $L^p(X,\mu)$ puede ser útil en algunas aplicaciones, porque la descripción explícita de los elementos de $L^p(X,\mu)$ no es muy simple. Por otro lado, en muchas situaciones es cómodo ver que $L^p(X,\mu)$ contiene a las funciones continuas de soporte compacto, a las funciones continuas a trozos (con ciertas restricciones), etc.