Subconjuntos densos de un espacio métrico

Sea (X, d) un espacio métrico. Denotamos por τ_d a la topología inducida por d.

1 Definición. Sea $A \subseteq X$. Se dice que A es *denso* (o, más precisamente, que A es *denso en* X), si $\mathrm{cl}(A) = X$.

2 Ejercicio. Escriba la definición de la densidad en términos de vecindades abiertas.

3 Ejercicio. Escriba la definición de la densidad en términos de bolas.

4 Proposición. *Sea $A \subseteq X$. Entonces A es denso si, y solo si, cualquier subconjunto abierto no vacío del espacio X se intersecta con A.*

En símbolos,

$$\mathrm{cl}(A) = X \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall V \in \tau_d \setminus \{\varnothing\} \quad A \cap V \neq \varnothing.$$

Demostración. $\Rightarrow$. Supongamos que $\mathrm{cl}(A) = X$. Sea $V \in \tau_d$ tal que $V \neq \varnothing$. Elegimos $x \in V$. Como $x \in \mathrm{cl}(A)$ y $V \in \tau_d(x)$, obtenemos que $A \cap V \neq \varnothing$.

$\Leftarrow$. Supongamos que cualquier subconjunto abierto no vacío de X se intersecta con A. Demostremos que $\mathrm{cl}(A) = X$. Sea $x \in X$. Queremos demostrar que $x \in \mathrm{cl}(A)$. Dada V en $\tau_d(x)$, se cumple que $V \in \tau_d$ y $V \neq \varnothing$, y usando la suposición concluimos que $A \cap V \neq \varnothing$. Hemos demostrado que $x \in \mathrm{cl}(A)$. $\square$

5 Ejercicio. Demostrar la Proposición 4 de otras maneras. Por ejemplo, usar propiedades del interior o de la cerradura de un conjunto.

6 Ejemplo (densidad de los números racionales en los números reales)**.** Mostremos que $\mathbb{Q}$ es un subconjunto denso del espacio $\mathbb{R}$. Vamos a usar la siguiente propiedad bien conocida de los números racionales: cualquier intervalo abierto no vacío tiene elementos racionales. De manera formal,

$$\forall a, b \in \mathbb{R} \qquad (a < b) \quad \Longrightarrow \quad (a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \varnothing. \tag{1}$$

La afirmación (1) se demuestra en otros cursos, después de construir los números reales.

Sea $x \in \mathbb{R}$ y sea $\delta > 0$. Entonces $B(x, \delta) = (x - \delta, x + \delta)$. Notemos que $x - \delta < x + \delta$. Por la propiedad (1), aplicada con $a = x - \delta$ y $b = x + \delta$, la intersección $(x - \delta, x + \delta) \cap \mathbb{Q}$ es no vacía. Como δ fue un número positivo arbitrario, hemos mostrado que $x \in \mathrm{cl}(\mathbb{Q})$.

7 Ejercicio (sobre la intersección de dos conjuntos abiertos densos)**.** Sean Y, Z conjuntos abiertos y densos en X, es decir, $Y, Z \in \tau_d$, $\mathrm{cl}(Y) = \mathrm{cl}(Z) = X$. Demuestre que $Y \cap Z$ es denso en X.

8 Ejercicio. Sean $Y, Z \subseteq X$ tales que $Y \subseteq \mathrm{cl}(Z)$ y $\mathrm{cl}(Y) = X$. Demuestre que $\mathrm{cl}(Z) = X$.