

Definición de la integral de Lebesgue para las funciones simples medibles positivas (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas
México

4 de junio de 2024

Objetivos:

- definir $\int_X f \, d\mu$ para f simples medibles positivas,
- expresar esta integral en términos de una representación generalizada de f ,
- definir $\int_A f \, d\mu$ para $A \in \mathcal{F}$.

Prerrequisitos:

- funciones simples, sus representaciones canónicas y generalizadas;
- funciones medibles;
- criterio de medibilidad de funciones simples;
- subespacio $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ de un espacio de medida (X, \mathcal{F}, μ) .

Plan

- 1 Funciones simples medibles (repass)
- 2 Integral de funciones simples medibles positivas
- 3 La integral sobre un conjunto

Plan

- 1 Funciones simples medibles (repass)
- 2 Integral de funciones simples medibles positivas
- 3 La integral sobre un conjunto

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$$

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) :=$$

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \left\{ f \in Y^X : \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \right\}.$$

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \left\{ f \in Y^X : \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \right\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan \mathcal{B}_Y , por eso

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \left\{ f \in Y^X : \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \right\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan \mathcal{B}_Y , por eso

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y)$$

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \left\{ f \in Y^X : \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \right\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan \mathcal{B}_Y , por eso

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \iff$$

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \left\{ f \in Y^X : \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \right\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan \mathcal{B}_Y , por eso

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \iff \forall v \in \mathbb{R} \quad f^{-1}[(v, +\infty)) \in \mathcal{F}$$

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \left\{ f \in Y^X : \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \right\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan \mathcal{B}_Y , por eso

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) &\iff \forall v \in \mathbb{R} \quad f^{-1}[(v, +\infty)) \in \mathcal{F} \\ &\iff \end{aligned}$$

Funciones medibles (repass)

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida.

Sea $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, o $Y = \mathbb{C}$.

Denotamos por \mathcal{B}_Y a la σ -álgebra de Borel de Y .

$$\mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) := \left\{ f \in Y^X : \forall B \in \mathcal{B}_Y \quad f^{-1}[B] \in \mathcal{F} \right\}.$$

Para $Y = [0, +\infty)$ o $Y = \mathbb{R}$, los rayos $(v, +\infty)$ generan \mathcal{B}_Y , por eso

$$\begin{aligned} f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) &\iff \forall v \in \mathbb{R} \quad f^{-1}[(v, +\infty)] \in \mathcal{F} \\ &\iff \forall v \in \mathbb{R} \quad \{x \in X : f(x) > v\} \in \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Representación canónica de funciones simples (repass)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Representación canónica de funciones simples (repass)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde v_1, \dots, v_m son diferentes a pares.

Representación canónica de funciones simples (repass)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde v_1, \dots, v_m son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \dots, m\}$ definimos $P_j :=$

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde v_1, \dots, v_m son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \dots, m\}$ definimos $P_j := f^{-1}[\{v_j\}]$.

Representación canónica de funciones simples (repass)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde v_1, \dots, v_m son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \dots, m\}$ definimos $P_j := f^{-1}[\{v_j\}]$.

Entonces, (P_1, \dots, P_m) es

Representación canónica de funciones simples (repass)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde v_1, \dots, v_m son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \dots, m\}$ definimos $P_j := f^{-1}[\{v_j\}]$.

Entonces, (P_1, \dots, P_m) es una partición de X y

Representación canónica de funciones simples (repass)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde v_1, \dots, v_m son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \dots, m\}$ definimos $P_j := f^{-1}[\{v_j\}]$.

Entonces, (P_1, \dots, P_m) es una partición de X y

f

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde v_1, \dots, v_m son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \dots, m\}$ definimos $P_j := f^{-1}[\{v_j\}]$.

Entonces, (P_1, \dots, P_m) es una partición de X y

$$f =$$

Representación canónica de funciones simples (repass)

Una función $f: X \rightarrow Y$ se llama **simple**, si el conjunto $f[X]$ es finito.

Proposición

Sea $f: X \rightarrow Y$ simple.

Supongamos que $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, donde v_1, \dots, v_m son diferentes a pares.

Para cada j en $\{1, \dots, m\}$ definimos $P_j := f^{-1}[\{v_j\}]$.

Entonces, (P_1, \dots, P_m) es una partición de X y

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Proposición

Sean $v_1, \dots, v_m \in Y$ diferentes a pares y sea (P_1, \dots, P_m) una partición de X .

Representación canónica de funciones simples (repaso)

Proposición

Sean $v_1, \dots, v_m \in Y$ diferentes a pares y sea (P_1, \dots, P_m) una partición de X .

Definimos

$$f := \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Representación canónica de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $v_1, \dots, v_m \in Y$ diferentes a pares y sea (P_1, \dots, P_m) una partición de X .

Definimos

$$f := \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces, f es simple, y para cada j en $\{1, \dots, m\}$

Representación canónica de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $v_1, \dots, v_m \in Y$ diferentes a pares y sea (P_1, \dots, P_m) una partición de X .

Definimos

$$f := \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces, f es simple, y para cada j en $\{1, \dots, m\}$

$$P_j$$

Representación canónica de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $v_1, \dots, v_m \in Y$ diferentes a pares y sea (P_1, \dots, P_m) una partición de X .

Definimos

$$f := \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces, f es simple, y para cada j en $\{1, \dots, m\}$

$$P_j =$$

Representación canónica de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $v_1, \dots, v_m \in Y$ diferentes a pares y sea (P_1, \dots, P_m) una partición de X .

Definimos

$$f := \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces, f es simple, y para cada j en $\{1, \dots, m\}$

$$P_j = f^{-1}[\{v_j\}].$$

Representación canónica de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $v_1, \dots, v_m \in Y$ diferentes a pares y sea (P_1, \dots, P_m) una partición de X .

Definimos

$$f := \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces, f es simple, y para cada j en $\{1, \dots, m\}$

$$P_j = f^{-1}[\{v_j\}].$$

La repr. canónica de una función simple es única, salvo el orden de los sumandos.

Funciones simples medibles (repass)

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible

y sea $f: X \rightarrow Y$ una función simple con la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Funciones simples medibles (repass)

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible

y sea $f: X \rightarrow Y$ una función simple con la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces,

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \quad \iff$$

Funciones simples medibles (repass)

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible

y sea $f: X \rightarrow Y$ una función simple con la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces,

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \quad \iff \quad P_1, \dots, P_m \in \mathcal{F}.$$

Funciones simples medibles (repass)

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible

y sea $f: X \rightarrow Y$ una función simple con la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces,

$$f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \quad \iff \quad P_1, \dots, P_m \in \mathcal{F}.$$

$$SM(X, \mathcal{F}, Y) := \{f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) : f[X] \text{ es finito}\}.$$

Funciones indicadoras medibles (repass)

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}) un espacio medible y sea $A \subseteq X$. Entonces,

$$\mathbb{1}_A \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y) \iff A \in \mathcal{F}.$$

$$\mathcal{J}(X, \mathcal{F}) := \{\mathbb{1}_A : A \in \mathcal{F}\}.$$

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$SM(X, \mathcal{F}, Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y .

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y .

⊆. Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y)$, entonces f tiene representación canónica

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j},$$

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y .

⊆. Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y)$, entonces f tiene representación canónica

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}, \quad P_j =$$

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y .

⊆. Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y)$, entonces f tiene representación canónica

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}, \quad P_j = f^{-1}[\{v_j\}] \in \mathcal{F}.$$

Combinaciones lineales de funciones indicadoras medibles

Proposición

$$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y) = \ell_Y(\mathcal{J}(X, \mathcal{F})),$$

donde $\ell_Y(C) :=$ las combinaciones lineales de C con coeficientes en Y .

⊆. Si $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y)$, entonces f tiene representación canónica

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}, \quad P_j = f^{-1}[\{v_j\}] \in \mathcal{F}.$$

⊇. $\mathcal{J}(X, \mathcal{F}) \subseteq \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y)$,

$\mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, Y)$ es cerrado bajo la adición y bajo la multiplicación por λ , $\lambda \in Y$.

Representaciones generalizadas de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $w_1, \dots, w_n \in Y$ y sea (Q_1, \dots, Q_n) una partición generalizada de X .

$$f := \sum_{k=1}^n w_k \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Representaciones generalizadas de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $w_1, \dots, w_n \in Y$ y sea (Q_1, \dots, Q_n) una partición generalizada de X .

$$f := \sum_{k=1}^n w_k \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Entonces, f es simple.

Si $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, v_1, \dots, v_m son diferentes a pares y $P_j = f^{-1}[\{v_j\}]$, entonces

$$P_j$$

Representaciones generalizadas de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $w_1, \dots, w_n \in Y$ y sea (Q_1, \dots, Q_n) una partición generalizada de X .

$$f := \sum_{k=1}^n w_k \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Entonces, f es simple.

Si $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, v_1, \dots, v_m son diferentes a pares y $P_j = f^{-1}[\{v_j\}]$, entonces

$$P_j =$$

Representaciones generalizadas de funciones simples (repass)

Proposición

Sean $w_1, \dots, w_n \in Y$ y sea (Q_1, \dots, Q_n) una partición generalizada de X .

$$f := \sum_{k=1}^n w_k \mathbb{1}_{Q_k}.$$

Entonces, f es simple.

Si $f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$, v_1, \dots, v_m son diferentes a pares y $P_j = f^{-1}[\{v_j\}]$, entonces

$$P_j = \bigcup_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} Q_k.$$

Plan

- 1 Funciones simples medibles (repass)
- 2 Integral de funciones simples medibles positivas
- 3 La integral sobre un conjunto

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\int_X^{(3)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$,

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\int_X^{(3)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$,
- $\int_X^{(4)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$.

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\int_X^{(3)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$,
- $\int_X^{(4)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$.

En esta clase definiremos $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$.

Definición de la integral para las funciones simples medibles positivas

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Supongamos que f tiene la sig. representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Definición de la integral para las funciones simples medibles positivas

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Supongamos que f tiene la sig. representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Definimos

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Definición de la integral para las funciones simples medibles positivas

Definición

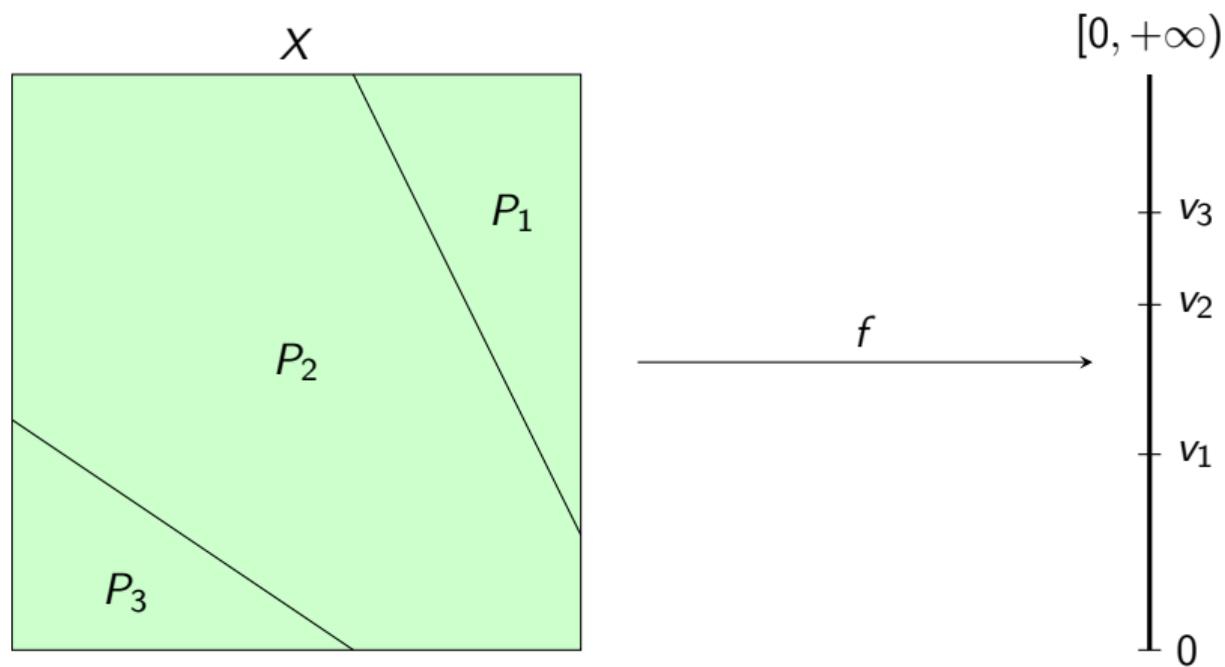
Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Supongamos que f tiene la sig. representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Definimos

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

También denotamos esta integral por $\int_X^{(1)} f \, d\mu$.



$$\int_X f \, d\mu = v_1 \mu(P_1) + v_2 \mu(P_2) + v_3 \mu(P_3).$$

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Si $X = \emptyset$, entonces

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Si $X = \emptyset$, entonces $\int_X f \, d\mu = 0$.

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Si $X = \emptyset$, entonces $\int_X f \, d\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \mu(P_j) =$

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Si $X = \emptyset$, entonces $\int_X f \, d\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \mu(P_j) = 0$.

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Si $X = \emptyset$, entonces $\int_X f \, d\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \mu(P_j) =$

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Si $X = \emptyset$, entonces $\int_X f \, d\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \mu(P_j) = 0$.

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Si $X = \emptyset$, entonces $\int_X f \, d\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j > 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \mu(P_j) =$

Observaciones sobre la definición

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Si $X = \emptyset$, entonces $\int_X f \, d\mu = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) < +\infty$, entonces el sumando correspondiente es $v_j \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j = 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \mu(P_j) = 0$.

Si $v_j > 0$ y $\mu(P_j) = +\infty$, entonces $v_j \mu(P_j) = +\infty$.

Integral de una función simple medible positiva dada por una representación generalizada

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

$$f = \sum_{k=1}^n w_k \mathbb{1}_{Q_k},$$

donde $w_1, \dots, w_n \in [0, +\infty)$, (Q_1, \dots, Q_n) un partición generalizada de X .

Entonces

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k).$$

Demostración, inicio

Sean v_1, \dots, v_m los elementos de $f[X]$ y sean P_1, \dots, P_m sus preimágenes:

$$P_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Demostración, inicio

Sean v_1, \dots, v_m los elementos de $f[X]$ y sean P_1, \dots, P_m sus preimágenes:

$$P_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Entonces, f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Demostración, inicio

Sean v_1, \dots, v_m los elementos de $f[X]$ y sean P_1, \dots, P_m sus preimágenes:

$$P_j := f^{-1}[\{v_j\}].$$

Entonces, f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Luego, por la definición,

$$\int_X f \, d\mu = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$.

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k)$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) =$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k)$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) =$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k)$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) =$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) = \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k)$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k) \\ &= \end{aligned}$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k) \\ &= \sum_{j=1}^m v_j \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} \mu(Q_k) \end{aligned}$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k) \\ &= \sum_{j=1}^m v_j \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} \mu(Q_k) = \end{aligned}$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k) \\ &= \sum_{j=1}^m v_j \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j) \end{aligned}$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k) \\ &= \sum_{j=1}^m v_j \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j) = \end{aligned}$$

Demostración, final

Sabemos que si $Q_k \neq \emptyset$, entonces $w_k \in f[X] = \{v_1, \dots, v_m\}$. Luego

$$\{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset\} = \bigcup_{j=1}^m \{1 \leq k \leq n: Q_k \neq \emptyset, w_k = v_j\}.$$

Empezamos con el lado derecho de la fórmula deseada:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k \mu(Q_k) &= \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j, Q_k \neq \emptyset}} w_k \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ w_k = v_j}} w_k \mu(Q_k) \\ &= \sum_{j=1}^m v_j \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ w_k = v_j}} \mu(Q_k) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j) = \int_X f \, d\mu. \end{aligned}$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$.

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu =$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A).$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A =$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Por eso

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu =$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Por eso

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(X \setminus A)$$

Ejemplo: la integral de la función indicadora

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = \mu(A).$$

En efecto, $\mathbb{1}_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$\mathbb{1}_A = 1 \cdot \mathbb{1}_A + 0 \cdot \mathbb{1}_{X \setminus A}.$$

Por eso

$$\int_X \mathbb{1}_A d\mu = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(X \setminus A) = \mu(A).$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

a

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a =$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Luego

$$\int_{\{1, \dots, n\}} a \, d\nu$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Luego

$$\int_{\{1, \dots, n\}} a \, d\nu =$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Luego

$$\int_{\{1, \dots, n\}} a \, d\nu = \sum_{k=1}^n a_k \nu(\{k\})$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Luego

$$\int_{\{1, \dots, n\}} a \, d\nu = \sum_{k=1}^n a_k \nu(\{k\}) =$$

Ejemplo: una suma finita como una integral

Sea $a = [a_k]_{k=1}^n \in [0, +\infty)^n$.

Consideramos $X = \{1, \dots, n\}$ con la σ -álgebra 2^X y con la medida de conteo ν .

Entonces, $a \in \mathcal{SM}(X, 2^X, [0, +\infty))$.

La función simple a tiene la siguiente representación generalizada:

$$a = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{1}_{\{k\}}.$$

Luego

$$\int_{\{1, \dots, n\}} a \, d\nu = \sum_{k=1}^n a_k \nu(\{k\}) = \sum_{k=1}^n a_k.$$

Plan

- 1 Funciones simples medibles (repass)
- 2 Integral de funciones simples medibles positivas
- 3 La integral sobre un conjunto

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$.

Pongamos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F} : B \subseteq A\}, \quad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces, $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$.

Pongamos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F} : B \subseteq A\}, \quad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces, $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

En otras palabras, $\mathcal{F}_A := 2^A \cap \mathcal{F}$.

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$.

Pongamos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F} : B \subseteq A\}, \quad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces, $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

En otras palabras, $\mathcal{F}_A := 2^A \cap \mathcal{F}$.

Demostración: ejercicio.

La restricción de una función medible a un conjunto medible

Proposición

Sean (X, \mathcal{F}) , (Y, \mathcal{H}) espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces, $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

La restricción de una función medible a un conjunto medible

Proposición

Sean (X, \mathcal{F}) , (Y, \mathcal{H}) espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces, $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] =$$

La restricción de una función medible a un conjunto medible

Proposición

Sean (X, \mathcal{F}) , (Y, \mathcal{H}) espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces, $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A: f|_A(x) \in B\} =$$

La restricción de una función medible a un conjunto medible

Proposición

Sean (X, \mathcal{F}) , (Y, \mathcal{H}) espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces, $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A: f|_A(x) \in B\} = \{x \in A: f(x) \in B\} =$$

La restricción de una función medible a un conjunto medible

Proposición

Sean (X, \mathcal{F}) , (Y, \mathcal{H}) espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces, $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A: f|_A(x) \in B\} = \{x \in A: f(x) \in B\} = A \cap f^{-1}[B]$$

La restricción de una función medible a un conjunto medible

Proposición

Sean (X, \mathcal{F}) , (Y, \mathcal{H}) espacios medibles sea $A \in \mathcal{F}$.

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, Y, \mathcal{H})$. Entonces, $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, Y, \mathcal{H})$.

Demostración. Si $B \in \mathcal{H}$, entonces

$$f|_A^{-1}[B] = \{x \in A: f|_A(x) \in B\} = \{x \in A: f(x) \in B\} = A \cap f^{-1}[B] \in \mathcal{F}.$$

Definición de la integral sobre un conjunto medible

Definición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A^{(1)} f \, d\mu := \int_A^{(1)} f|_A \, d\mu_A.$$

Fórmula para la integral sobre un conjunto

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

Supongamos que f tiene la siguiente representación generalizada (o canónica):

$$f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}.$$

Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A).$$

Demostración

Es fácil ver que la familia $(P_j \cap A)_{j=1}^m$ es una partición generalizada de A , y

$$\forall x \in P_j \cap A \quad f(x) = v_j.$$

Demostración

Es fácil ver que la familia $(P_j \cap A)_{j=1}^m$ es una partición generalizada de A , y

$$\forall x \in P_j \cap A \quad f(x) = v_j.$$

Por lo tanto, $f|_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$f|_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

Demostración

Es fácil ver que la familia $(P_j \cap A)_{j=1}^m$ es una partición generalizada de A , y

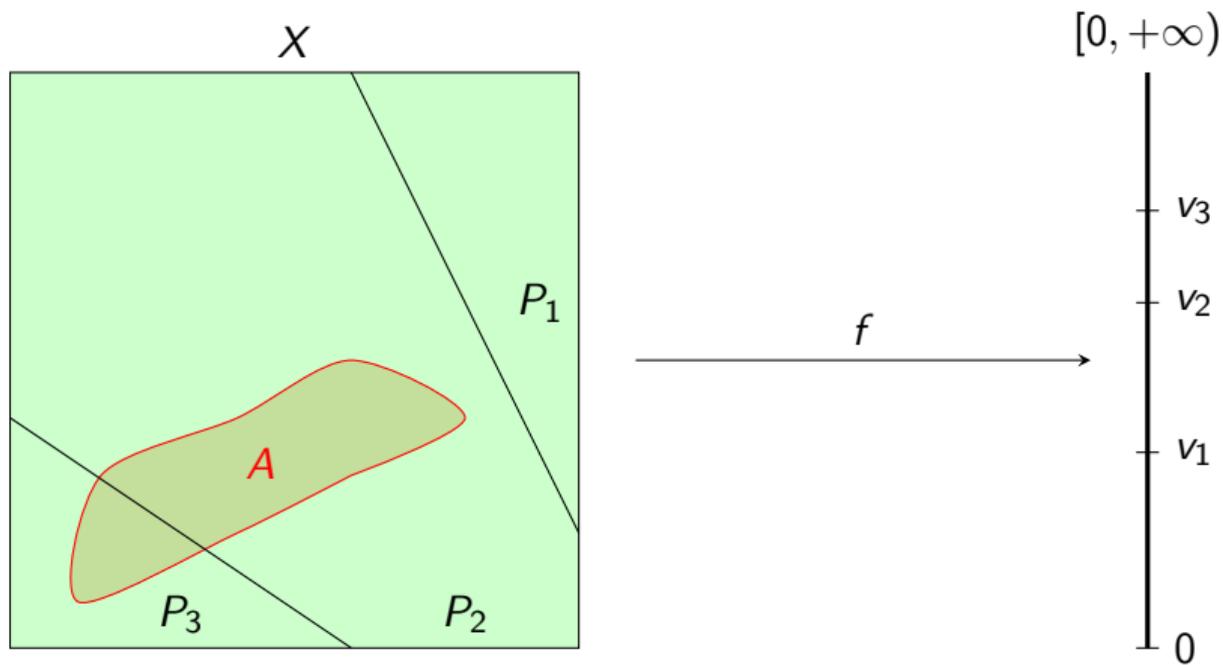
$$\forall x \in P_j \cap A \quad f(x) = v_j.$$

Por lo tanto, $f|_A$ tiene la siguiente representación generalizada:

$$f|_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

Luego

$$\int_A f \, d\mu \stackrel{\text{def}}{=} \int_A f|_A \, d\mu_A = \sum_{j=1}^m v_j \mu|_A(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A).$$



$$\int_A f \, d\mu = v_1 \mu(A \cap P_1) + v_2 \mu(A \cap P_2) + v_3 \mu(A \cap P_3).$$

Otra fórmula para la integral sobre un conjunto

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = \int_X f \mathbb{1}_A \, d\mu.$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \mathbb{1}_A$.

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \mathbb{1}_A d\mu$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \mathbb{1}_A d\mu =$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \mathbb{1}_A d\mu = 0 \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A)$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \mathbb{1}_A d\mu = 0 \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) =$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \mathbb{1}_A d\mu = 0 \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A)$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \mathbb{1}_A d\mu = 0 \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) =$$

Demostración

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica: $f = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j}$.

Entonces,

$$f \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j} \cdot \mathbb{1}_A = \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A} = 0 \mathbb{1}_{X \setminus A} + \sum_{j=1}^m v_j \mathbb{1}_{P_j \cap A}.$$

La última expresión es una representación generalizada de $f \mathbb{1}_A$. Luego

$$\int_A f \mathbb{1}_A d\mu = 0 \mu(X \setminus A) + \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) = \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j \cap A) = \int_A f d\mu.$$