

Definición de la integral de Lebesgue para funciones medibles positivas (un tema de análisis real)

Egor Maximenko

<https://www.egormaximenko.com>

Instituto Politécnico Nacional
Escuela Superior de Física y Matemáticas, México

10 de junio de 2024

Objetivos:

- definir la integral de Lebesgue para funciones medibles positivas;
- demostrar algunas de sus propiedades elementales.

Prerrequisitos:

- la integral de Lebesgue para funciones simples medibles positivas,
- el supremo de un subconjunto de $[-\infty, +\infty]$,
- la imagen de una función, propiedades de las imágenes;

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\int_X^{(3)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$,

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\int_X^{(3)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$,
- $\int_X^{(4)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$.

¿En qué etapa estamos?

Vamos a definir la integral de Lebesgue en 4 etapas:

- $\int_X^{(1)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$,
- $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$,
- $\int_X^{(3)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{R})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$,
- $\int_X^{(4)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mathbb{C})$ con $\int_X^{(2)} |f| \, d\mu < +\infty$.

En esta clase definiremos $\int_X^{(2)} f \, d\mu$ para $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Plan

- 1 Repaso
- 2 Definición de la integral de funciones positivas medibles
- 3 La integral sobre un subconjunto

Plan

- 1 Repaso
- 2 Definición de la integral de funciones positivas medibles
- 3 La integral sobre un subconjunto

Definición de la integral para funciones simples medibles positivas, repaso

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

Supongamos que f tiene la siguiente representación canónica:

$$f = \sum_{j=1}^m v_j 1_{P_j}.$$

Definimos

$$\int_X f \, d\mu := \sum_{j=1}^m v_j \mu(P_j).$$

También denotamos esta integral por $\int_X^{(1)} f \, d\mu$.

Propiedad monótona de \int^1 respecto a la función, repaso

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que $f \leq g$. Entonces

Propiedad monótona de $\int^{(1)}$ respecto a la función, repaso

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X^{(1)} f \, d\mu \leq \int_X^{(1)} g \, d\mu.$$

Propiedad homogénea de \int^1 , repaso

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $\lambda \in [0, +\infty)$. Entonces

Propiedad homogénea de $\int^{(1)}$, repaso

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $\lambda \in [0, +\infty)$. Entonces

$$\int_X^{(1)} (\lambda f) d\mu = \lambda \int_X^{(1)} f d\mu.$$

La integral sobre un conjunto, repaso

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A^{(1)} f \, d\mu :=$$

La integral sobre un conjunto, repaso

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A^{(1)} f \, d\mu := \int_X^{(1)} f|_A \, d\mu.$$

La integral sobre un conjunto, repaso

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A^{(1)} f \, d\mu := \int_X^{(1)} f|_A \, d\mu.$$

Proposición

$$\int_A^{(1)} f \, d\mu =$$

La integral sobre un conjunto, repaso

Definición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, \mu)$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A^{(1)} f \, d\mu := \int_X^{(1)} f|_A \, d\mu.$$

Proposición

$$\int_A^{(1)} f \, d\mu = \int_X^{(1)} f \mathbf{1}_A \, d\mu.$$

Propiedad monótona de la imagen, repaso

Proposición

Sea $\varphi: P \rightarrow Q$ y sea $R, S \subseteq P$, $R \subseteq S$. Entonces

$$\varphi[R] \subseteq \varphi[S].$$

Propiedad monótona del supremo, repaso

Proposición

Sean $P, Q \subseteq [-\infty, +\infty]$ tales que $P \subseteq Q$. Entonces

$$\sup(P) \leq \sup(Q).$$

Plan

- 1 Repaso
- 2 Definición de la integral de funciones positivas medibles
- 3 La integral sobre un subconjunto

Definición de $\int f$ para f positiva

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\mathcal{L}_f := \left\{ g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) : g \leq f \right\}.$$

Definición de $\int f$ para f positiva

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\mathcal{L}_f := \left\{ g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) : g \leq f \right\}.$$

Definimos $J: \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \rightarrow [0, +\infty]$,

$$J(g) := \int_X^{(1)} g \, d\mu.$$

Definición de $\int f$ para f positiva

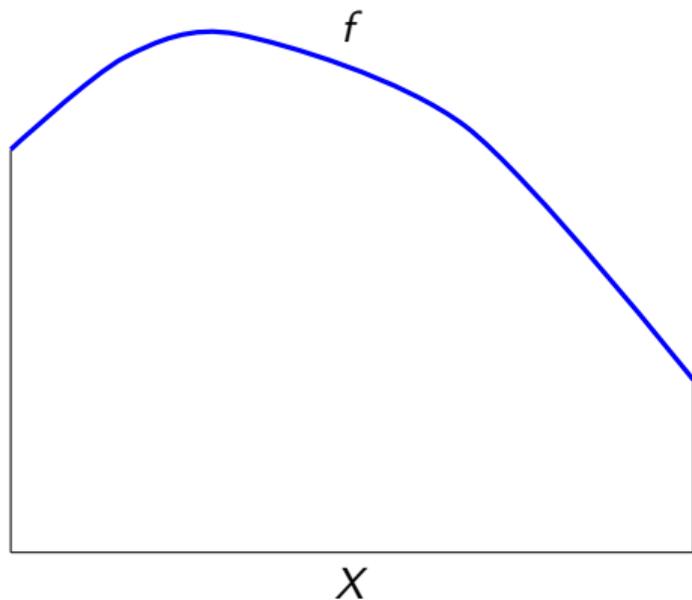
Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$. Pongamos

$$\mathcal{L}_f := \left\{ g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) : g \leq f \right\}.$$

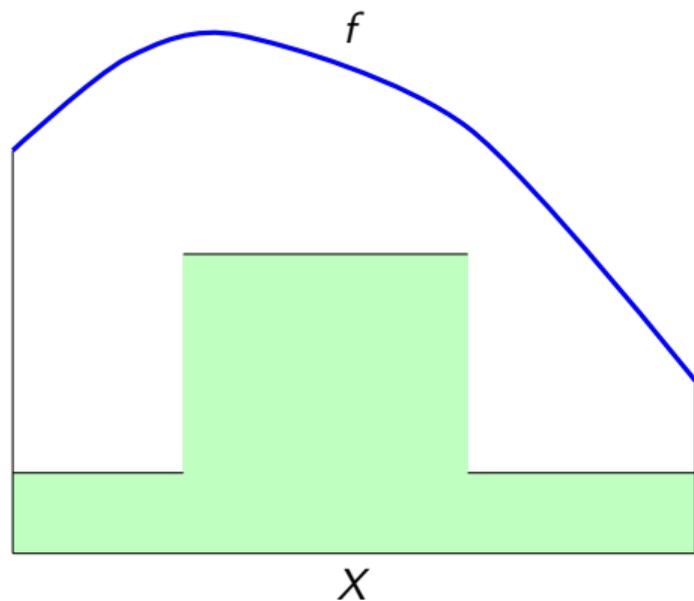
Definimos $J: \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)) \rightarrow [0, +\infty]$,

$$J(g) := \int_X^{(1)} g \, d\mu.$$

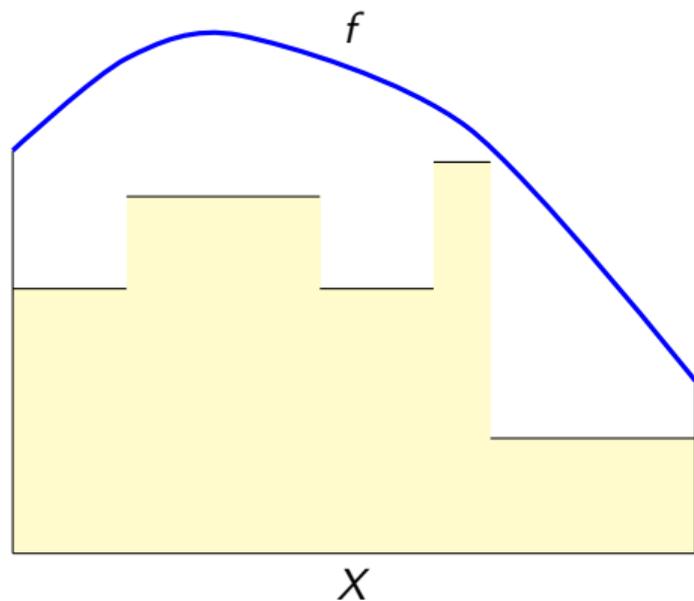
$$\int_X^{(2)} f \, d\mu := \sup(J[\mathcal{L}_f]) = \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, d\mu : g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), g \leq f \right\}.$$



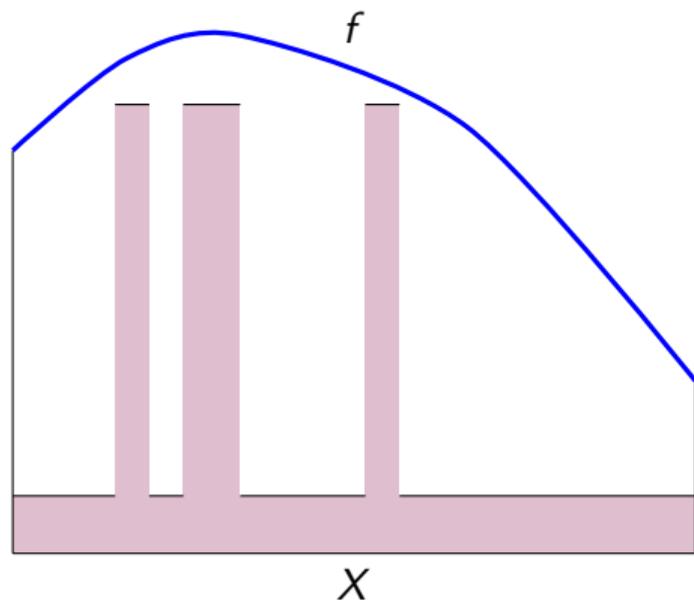
$$\int_X^{(2)} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, d\mu : g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



$$\int_X^{(2)} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, d\mu : g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



$$\int_X^{(2)} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, d\mu : g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$



$$\int_X^{(2)} f \, d\mu := \sup \left\{ \int_X^{(1)} g \, d\mu : g \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty)), \quad g \leq f \right\}.$$

$f^{(2)}$ es una extensión de $f^{(1)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X f^{(2)} d\mu = \int_X f^{(1)} d\mu.$$

$f^{(2)}$ es una extensión de $f^{(1)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X f^{(2)} d\mu = \int_X f^{(1)} d\mu.$$

Demostración. Como f es simple y $f \leq f$, tenemos

$f^{(2)}$ es una extensión de $f^{(1)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X^{(2)} f \, d\mu = \int_X^{(1)} f \, d\mu.$$

Demostración. Como f es simple y $f \leq f$, tenemos $f \in \mathcal{L}_f$.

Para cada g en \mathcal{L}_f tenemos $g \leq f$ y por eso

$f^{(2)}$ es una extensión de $f^{(1)}$

Proposición

Sea $f \in \mathcal{SM}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$. Entonces

$$\int_X f^{(2)} d\mu = \int_X f^{(1)} d\mu.$$

Demostración. Como f es simple y $f \leq f$, tenemos $f \in \mathcal{L}_f$.

Para cada g en \mathcal{L}_f tenemos $g \leq f$ y por eso $J[g] \leq J[f]$.

Conclusión: $J[f]$ es el máximo elemento de $J[\mathcal{L}_f]$.

Notación: funciones positivas Lebesgue-integrables

$$\mathcal{L}^1(X, \mathcal{F}, \mu, [0, +\infty]) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty]) : \int_X f \, d\mu < +\infty \right\}.$$

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos \mathcal{L}_f y \mathcal{L}_g :

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_g.$$

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos \mathcal{L}_f y \mathcal{L}_g :

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_g.$$

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos \mathcal{L}_f y \mathcal{L}_g :

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_g.$$

Por eso

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos \mathcal{L}_f y \mathcal{L}_g :

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_g.$$

Por eso $J[\mathcal{L}_f] \subseteq J[\mathcal{L}_g]$ y

La propiedad monótona de $\int^{(2)}$ respecto a la función

Proposición

Sean $f, g \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ tales que $f \leq g$. Entonces

$$\int_X f \, d\mu \leq \int_X g \, d\mu.$$

Demostración. Es fácil comparar los conjuntos \mathcal{L}_f y \mathcal{L}_g :

$$\mathcal{L}_f \subseteq \mathcal{L}_g.$$

Por eso $J[\mathcal{L}_f] \subseteq J[\mathcal{L}_g]$ y

$$\sup(J[\mathcal{L}_f]) \leq \sup(J[\mathcal{L}_g]).$$

La propiedad homogénea de la integral de funciones positivas

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $\lambda \in [0, +\infty)$. Entonces

$$\int_X \lambda f \, d\mu = \lambda \int_X f \, d\mu.$$

Idea de demostración de la propiedad homogénea

El caso $\lambda = 0$ es trivial. Consideremos el caso $\lambda > 0$.

Idea de demostración de la propiedad homogénea

El caso $\lambda = 0$ es trivial. Consideremos el caso $\lambda > 0$.

Primero justificar que

$$h \in \mathcal{L}_{\lambda f} \quad \iff \quad \exists g \in \mathcal{L}_f \quad h = \lambda g.$$

Luego usar la propiedad homogénea de J y demostrar que

$$J[\mathcal{L}_{\lambda f}] = \lambda J[\mathcal{L}_f].$$

Observación sobre la propiedad aditiva (la demostraremos después)

En una de las clases futuras demostraremos el teorema de la convergencia monótona y con ayuda de ese teorema podremos demostrar la propiedad aditiva de $\int_X^{(2)}$:

$$\int_X^{(2)} (f + g) d\mu = \int_X^{(2)} f d\mu + \int_X^{(2)} g d\mu.$$

Aproximaremos f y g por sucesiones crecientes de funciones simples medibles positivas y aplicaremos el teorema de la convergencia monótona.

Desgraciadamente, la definición de $\int_X^{(2)}$ no es cómoda para demostrar la propiedad aditiva de manera directa.

Plan

- 1 Repaso
- 2 Definición de la integral de funciones positivas medibles
- 3 La integral sobre un subconjunto

Un subespacio de un espacio de medida, repaso

Proposición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida y sea $A \in \mathcal{F}$. Pongamos

$$\mathcal{F}_A := \{B \in \mathcal{F} : B \subseteq A\}, \quad \mu_A := \mu|_{\mathcal{F}_A}.$$

Entonces $(A, \mathcal{F}_A, \mu_A)$ es un espacio de medida.

La restricción de una función medible es medible, repaso

Proposición

Sean (X, \mathcal{F}) un espacio medible, $A \in \mathcal{F}$, $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$.

Entonces $f|_A \in \mathcal{M}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty])$.

Definición de la integral sobre un conjunto medible

Definición

Sea (X, \mathcal{F}, μ) un espacio de medida, sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty))$ y sea $A \in \mathcal{F}$.

$$\int_A^{(2)} f \, d\mu := \int_X^{(2)} f|_A \, d\mu_A.$$

Fórmula para la integral sobre un conjunto

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A f \, d\mu = \int_X 1_A f \, d\mu.$$

Fórmula para la integral sobre un conjunto

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sea $A \in \mathcal{F}$. Entonces

$$\int_A f \, d\mu = \int_X 1_A f \, d\mu.$$

Ya sabemos que esta propiedad se cumple para $f^{(1)}$.

Ahora la vamos a demostrar para $f^{(2)}$.

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A,$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \quad \mathcal{L}_{f_A} := \left\{ s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) : s \leq f_A \right\}.$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \quad \mathcal{L}_{f_A} := \left\{ s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) : s \leq f_A \right\}.$$

$$J_A: \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \rightarrow [0, +\infty], \quad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, d\mu_A.$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \quad \mathcal{L}_{f_A} := \left\{ s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) : s \leq f_A \right\}.$$

$$J_A: \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \rightarrow [0, +\infty], \quad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, d\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \, d\mu =$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \quad \mathcal{L}_{f_A} := \left\{ s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) : s \leq f_A \right\}.$$

$$J_A: \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \rightarrow [0, +\infty], \quad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, d\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \, d\mu = \sup(J_A[\mathcal{L}_{f_A}]),$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \quad \mathcal{L}_{f_A} := \left\{ s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) : s \leq f_A \right\}.$$

$$J_A: \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \rightarrow [0, +\infty], \quad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, d\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \, d\mu = \sup(J_A[\mathcal{L}_{f_A}]), \quad \int_X^{(2)} 1_A f \, d\mu =$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \quad \mathcal{L}_{f_A} := \left\{ s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) : s \leq f_A \right\}.$$

$$J_A: \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \rightarrow [0, +\infty], \quad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, d\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \, d\mu = \sup(J_A[\mathcal{L}_{f_A}]), \quad \int_X^{(2)} 1_A f \, d\mu = \sup(J[\mathcal{L}_{1_A f}]).$$

Demostración, inicio

Introducimos la siguiente notación:

$$f_A := f|_A, \quad \mathcal{L}_{f_A} := \left\{ s \in \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) : s \leq f_A \right\}.$$

$$J_A: \mathcal{SM}(A, \mathcal{F}_A, [0, +\infty)) \rightarrow [0, +\infty], \quad J_A(s) := \int_A^{(1)} s \, d\mu_A.$$

Por las definiciones,

$$\int_A^{(2)} f \, d\mu = \sup(J_A[\mathcal{L}_{f_A}]), \quad \int_X^{(2)} 1_A f \, d\mu = \sup(J[\mathcal{L}_{1_A f}]).$$

Vamos a demostrar que $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] = J[\mathcal{L}_{1_A f}]$.

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A}f]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A}f]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $s = g|_A$,

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A g = g$,

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$.

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v = J_A(s) =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v = J_A(s) = \int_A^{(1)} s \, d\mu_A =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v = J_A(s) = \int_A^{(1)} s d\mu_A = \int_X^{(1)} 1_A g d\mu =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \subseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}]$. Encontramos s en \mathcal{L}_{f_A} tal que $v = J_A(s)$.

Definimos $g: X \rightarrow [0, +\infty)$ como la extensión de s con el valor 0:

$$g(x) := \begin{cases} s(x), & x \in A; \\ 0, & x \in X \setminus A. \end{cases}$$

Es fácil ver que $s = g|_A$, $1_A g = g$, $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$. Luego

$$v = J_A(s) = \int_A^{(1)} s d\mu_A = \int_X^{(1)} 1_A g d\mu = \int_X^{(1)} g d\mu \in J[\mathcal{L}_{1_A f}].$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$.

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$.

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces, $s \leq f_A$ y

$$v =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces, $s \leq f_A$ y

$$v = J(g) =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces, $s \leq f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \, d\mu =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces, $s \leq f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \, d\mu = \int_X^{(1)} 1_A g \, d\mu =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces, $s \leq f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \, d\mu = \int_X^{(1)} 1_A g \, d\mu = \int_A^{(1)} g \, d\mu =$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces, $s \leq f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \, d\mu = \int_X^{(1)} 1_A g \, d\mu = \int_A^{(1)} g \, d\mu = \int_A^{(1)} s \, d\mu_A \in$$

Demostración, $J_A[\mathcal{L}_{f_A}] \supseteq J[\mathcal{L}_{1_A f}]$

Sea $v \in J[\mathcal{L}_{1_A f}]$. Encontramos $g \in \mathcal{L}_{1_A f}$ tal que $v = J(g)$.

Como $g \leq 1_A f$, es fácil ver que

$$\forall x \in X \setminus A \quad g(x) = 0,$$

así que $g = 1_A g$. Definimos

$$s = g|_A.$$

Entonces, $s \leq f_A$ y

$$v = J(g) = \int_X^{(1)} g \, d\mu = \int_X^{(1)} 1_A g \, d\mu = \int_A^{(1)} g \, d\mu = \int_A^{(1)} s \, d\mu_A \in J_A[\mathcal{L}_{f_A}].$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Aplicamos la proposición anterior y la monotonía de la integral respecto a la función:

$$\int_A f \, d\mu =$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Aplicamos la proposición anterior y la monotonía de la integral respecto a la función:

$$\int_A f \, d\mu = \int_X 1_A f \, d\mu \leq$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Aplicamos la proposición anterior y la monotonía de la integral respecto a la función:

$$\int_A f \, d\mu = \int_X 1_A f \, d\mu \leq \int_X 1_B f \, d\mu =$$

Monotonía de la integral respecto al conjunto de integración

Proposición

Sea $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, [0, +\infty])$ y sean $A, B \in \mathcal{F}$ tales que $A \subseteq B$. Entonces,

$$\int_A f \, d\mu \leq \int_B f \, d\mu.$$

Demostración. Notamos que

$$1_A f \leq 1_B f.$$

Aplicamos la proposición anterior y la monotonía de la integral respecto a la función:

$$\int_A f \, d\mu = \int_X 1_A f \, d\mu \leq \int_X 1_B f \, d\mu = \int_B f \, d\mu.$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$, $b \in [0, +\infty)$.

Supongamos que $f(x) = b$ para cada x en A .

Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = b \mu(A).$$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$, $b \in [0, +\infty)$.

Supongamos que $f(x) = b$ para cada x en A .

Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = b \mu(A).$$

Idea de demostración. $f 1_A =$

La integral de una función que es constante en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$, $b \in [0, +\infty)$.

Supongamos que $f(x) = b$ para cada x en A .

Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = b \mu(A).$$

Idea de demostración. $f 1_A = b 1_A$.

La integral de una función que se anula en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = 0$ para cada x en A .

Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = 0.$$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A .

Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A .

Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$.

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in \mathcal{L}_{f 1_A}$.

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in \mathcal{L}_{f 1_A}$.

$$\sup(J[\mathcal{L}_{f 1_A}])$$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in \mathcal{L}_{f 1_A}$.

$$\sup(J[\mathcal{L}_{f 1_A}]) \geq$$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in \mathcal{L}_{f 1_A}$.

$$\sup(J[\mathcal{L}_{f 1_A}]) \geq \sup_{v \in [0, +\infty)} \int_X^{(1)} v 1_A \, d\mu$$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in \mathcal{L}_{f 1_A}$.

$$\sup(J[\mathcal{L}_{f 1_A}]) \geq \sup_{v \in [0, +\infty)} \int_X^{(1)} v 1_A \, d\mu =$$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in \mathcal{L}_{f 1_A}$.

$$\sup(J[\mathcal{L}_{f 1_A}]) \geq \sup_{v \in [0, +\infty)} \int_X^{(1)} v 1_A \, d\mu = \sup_{v \in [0, +\infty)} (v \mu(A))$$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in \mathcal{L}_{f 1_A}$.

$$\sup(J[\mathcal{L}_{f 1_A}]) \geq \sup_{v \in [0, +\infty)} \int_X^{(1)} v 1_A \, d\mu = \sup_{v \in [0, +\infty)} (v \mu(A)) =$$

La integral de una función que vale $+\infty$ en el conjunto de integración

Proposición

Sean $f \in \mathcal{M}(X, \mathcal{F}, \mu)$, $A \in \mathcal{F}$. Supongamos que $f(x) = +\infty$ para cada x en A . Entonces,

$$\int_A f \, d\mu = (+\infty) \cdot \mu(A).$$

Idea de demostración. El caso $\mu(A) = 0$ es trivial (ejercicio).

Sea $\mu(A) > 0$. Para cada v en $[0, +\infty)$, $v 1_A \in \mathcal{L}_{f 1_A}$.

$$\sup(J[\mathcal{L}_{f 1_A}]) \geq \sup_{v \in [0, +\infty)} \int_X^{(1)} v 1_A \, d\mu = \sup_{v \in [0, +\infty)} (v \mu(A)) = +\infty.$$