Estructura de sigma-álgebras finitas o numerables (proyecto o tarea adicional)

Objetivos. Demostrar que los elementos de σ-álgebras finitas o numerables siempre son uniones de “átomos”. Deducir de aquí que el número de elementos en una σ-álgebra finita siempre es una potencia de dos, y que no existen σ-álgebras numerables (infinitas).

Un conjunto llamamos *numerable*, si es equipotente a $\mathbb{N}$. Según este definición, los conjuntos numerables son infinitos (algunos autores usan otra terminología).

Sea Ω un conjunto y sea $S \subseteq 2^\Omega$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

1 Definición (átomo de una σ-álgebra)**.** Un elemento $A \in S \setminus \{\varnothing\}$ se llama *átomo* de S si no existe ningún $B \in S$ tal que $B \subsetneq A$ y $B \neq \varnothing$. Al conjunto de todos los átomos de S lo denotamos por $\mathcal{A}_S$. En otras palabras,

$$\mathcal{A}_S \coloneqq \Big\{A \in S \setminus \{\varnothing\} \colon \quad \forall B \in S \setminus \{\varnothing\} \quad B \subseteq A \ \Rightarrow\ B = A\Big\}.$$

2 Ejemplo. Sea $\Omega = \{1,2,3,4\}$ y sea

$$S = \Big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{3,4\}, \Omega\Big\}.$$

Encuentre todos los átomos de S.

3 Ejemplo. Sea $\Omega = \mathbb{Z}$ y sea $S = 2^\Omega$. Describa todos los átomos de S.

4 Ejemplo (la σ-álgebra de subconjuntos de números reales invariantes bajo desplazamientos enteros)**.** Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y sea

$$S \coloneqq \Big\{C \subseteq \mathbb{R} \colon \quad C + \mathbb{Z} \subseteq C\Big\} = \{C \subseteq \mathbb{R} \colon \quad \forall x \in C \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad x + y \in C\}.$$

Describa todos los átomos de S.

5 Problema (cada punto del espacio pertenece a un único átomo)**.** Supongamos que S es finita o numerable. Sea $x \in \Omega$. Definamos A_x mediante la siguiente fórmula:

$$A_x \coloneqq \bigcap \{B \in S \colon\ x \in B\}.$$

Demuestre que A_x es un átomo y que A_x es el único átomo que contiene x.

6 Problema (cada elemento del álgebra es la unión de los átomos que él contiene)**.** Supongamos que S es finita o numerable. Sea $C \in S$. Demuestre que

$$C = \bigcup \{A \in \mathcal{A}_S \colon A \subseteq C\}.$$

7 Problema (biyección entre S y $2^{\mathcal{A}_S}$)**.** Supongamos que S es finita o numerable. Construya una biyección $\Phi\colon S \mapsto 2^{\mathcal{A}_S}$. Como un corolario se obtiene que $|S| = 2^{|\mathcal{A}_S|}$.

8 Problema (el número de elementos de una σ-álgebra finita)**.** Supongamos que S es finita. Entonces $\mathcal{A}_S$ también es finita y

$$|S| = 2^{|\mathcal{A}_S|}.$$

9 Problema. Demuestre que no existe ninguna σ-álgebra con un número finito impar de elementos.

10 Problema (sobre σ-álgebras numerables)**.** Muestre que no existe ninguna σ-álgebra numerable.