Estructura de sigma-álgebras finitas o numerables (tarea adicional)

Objetivos. Demostrar que los elementos de σ-álgebras finitas o numerables siempre son uniones de "átomos". Deducir de aquí que el número de elementos en una σ-álgebra finita siempre es una potencia de dos, y que no existen σ-álgebras numerables (infinitas).

Usamos la notación $\subset$ en el mismo sentido que $\subseteq$. Escribimos $A \subsetneq B$, cuando A es subconjunto de B y $A \neq B$. Un conjunto llamamos *numerable* si es equipotente a $\mathbb{N}$. Según este definición, los conjuntos numerables son infinitos (algunos autores usan otra terminología).

Sea Ω un conjunto y sea $S \subset 2^\Omega$ una σ-álgebra de subconjuntos de Ω.

1. Definición (átomo de una $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra). Un elemento $A \in S \setminus \{\varnothing\}$ se llama *átomo* de S si no existe ningún $B \in S$ tal que $B \subsetneq A$ y $B \neq \varnothing$. Al conjunto de todos los átomos de S lo denotamos por $\mathcal{A}_S$. En otras palabras,

$$\mathcal{A}_S \coloneqq \{A \in S \setminus \{\varnothing\}\colon \quad \forall B \in S \setminus \{\varnothing\} \quad B \subseteq A \ \Rightarrow \ B = A\}.$$

2. Ejemplo. Sea $\Omega = \{1,2,3,4\}$ y sea

$$S = \big\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, \{3,4\}, \Omega\big\}.$$

Encuentre todos los átomos de S.

3. Ejemplo. Sea $\Omega = \mathbb{Z}$ y sea $S = 2^\Omega$. Describa todos los átomos de S.

4. Ejemplo ($\boldsymbol{\sigma}$-álgebra de subconjuntos de números reales invariantes bajo desplazamientos enteros). Sea $\Omega = \mathbb{R}$ y sea

$$S = \{C \subset \mathbb{R}\colon \quad C + \mathbb{Z} \subset C\} = \{C \subset \mathbb{R}\colon \quad \forall x \in C \quad \forall y \in \mathbb{Z} \quad x + y \in C\}.$$

Describa todos los átomos de S.

5. Cada punto del espacio pertenece a un único átomo. Supongamos que S es finita o numerable. Sea $x \in \Omega$. Definamos A_x mediante la siguiente fórmula:

$$A_x \coloneqq \bigcap \{B \in S\colon \ x \in B\}.$$

Demuestre que A_x es un átomo y que A_x es el único átomo que contiene x.

6. Cada elemento del álgebra es la unión de los átomos que él contiene. Supongamos que S es finita o numerable. Sea $C \in S$. Demuestre que

$$C = \bigcup \{A \in \mathcal{A}_S\colon A \subset C\}.$$

7. Biyección entre $\boldsymbol{S}$ y $\mathbf{2}^{\boldsymbol{\mathcal{A}_S}}$. Supongamos que S es finita o numerable. Construya una biyección $\Phi\colon S \mapsto 2^{\mathcal{A}_S}$. Como un corolario se obtiene que $|S| = 2^{|\mathcal{A}_S|}$.

8. El número de elementos de una $\boldsymbol{\sigma}$-álgebra finita. Supongamos que S es finita. Entonces $\mathcal{A}_S$ también es finita y

$$|S| = 2^{|\mathcal{A}_S|}.$$

9. Corolario. No existe ninguna σ-álgebra con un número finito impar de elementos.

10. Sobre $\boldsymbol{\sigma}$-álgebras numerables. Muestre que no existe ninguna σ-álgebra numerable.