Estimación de las funciones coseno y seno

Lema 1. *Para cada x en $\mathbb{R}$,*

$$|\cos(x)| \leqslant 1, \qquad |\operatorname{sen}(x)| \leqslant 1.$$

Lema 2. *Sea D un subconjunto de $\mathbb{R}$ tal que $-D = D$, y sea $f_1, f_2 \colon D \to \mathbb{R}$ funciones pares. Supongamos que la desigualdad $f_1(x) \leqslant f_2(x)$ se cumple para cada x en $D \cap [0, +\infty)$. Entonces esta desigualdad se cumple para cada x en D.*

Demostración. Si $x \in D \cap (-\infty, 0)$, entonces $-x \in D \cap (0, +\infty)$, y

$$f_1(x) = f_1(-x) \leqslant f_2(-x) = f_2(x).$$ □

Lema 3. *Para cada x en $\mathbb{R}$,*

$$|\operatorname{sen}(x)| \leqslant |x|. \tag{1}$$

Demostración. Consideramos la función

$$f(x) := x - \operatorname{sen}(x).$$

Notamos que $f(0) = 0$ y que f es creciente:

$$f'(x) = 1 - \cos(x) = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \geqslant 0.$$

Luego $f(x) \geqslant 0$ para cada $x \geqslant 0$. En particular, para cada x en $[0, \pi/2]$,

$$|\operatorname{sen}(x)| = \operatorname{sen}(x) \leqslant x = |x|.$$

Para $x \geqslant \pi/2$, aplicamos la cota del Lema 1:

$$|\operatorname{sen}(x)| \leqslant 1 < \frac{\pi}{2} \leqslant x = |x|.$$

Hemos demostrado (1) para cada $x \geqslant 0$. Como ambos lados de (1) son funciones pares, con el Lema 2 concluimos que la desigualdad se cumple para cada x en $\mathbb{R}$. □

Lema 4. *Para cada x en $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,*

$$\cos(x) \geqslant 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Demostración. Como ambos lados son funciones pares, por el Lema 2 es suficiente considerar el caso cuando $x \in [0, \pi/2]$. Definimos $f \colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Entonces $f(0) = 0$ y

$$f'(x) = -\operatorname{sen}(x) + x \geqslant 0.$$

Luego $f(x) \geqslant 0$ para cada x en $[0, \pi/2]$. □

Lema 5. *Para cada* x *en* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\operatorname{sen}(x) - x\cos(x) \geqslant 0.$$

Demostración. Definimos $f\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$, $f(x) := \operatorname{sen}(x) - x\cos(x)$. Entonces $f(0) = 0$ y

$$f'(x) = \cos(x) - \cos(x) + x\operatorname{sen}(x) \geqslant 0,$$

luego $f(x) \geqslant 0$ para cada x en $[0, \pi/2]$. □

Lema 6. *Para cada* x *en* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|\operatorname{sen}(x)| \geqslant \frac{2}{\pi}|x|. \tag{2}$$

Demostración. Como ambos lados de (2) son funciones pares, es suficiente demostrar (2) para x en $[0, \pi/2]$. Definimos $f\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ mediante la regla

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}, & x \in (0, \pi/2], \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Entonces f es continua en $[0, \pi/2]$ y derivable en $(0, \pi/2)$, y

$$f'(x) = \frac{x\cos(x) - \operatorname{sen}(x)}{x^2} \leqslant 0.$$

Concluimos que para cada x en $[0, \pi/2]$

$$\frac{\operatorname{sen}(x)}{x} = f(x) \geqslant f(\pi/2) = \frac{2}{\pi},$$

y de aquí sale (2). □

Lema 7. *Para cada* x *en* $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\operatorname{sen}(x) \geqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

Demostración. Definimos $f\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$,

$$f(x) := \operatorname{sen}(x) - x + \frac{x^3}{6}.$$

Entonces $f(0) = 0$ y $f'(x) = \cos(x) - 1 + \frac{x^2}{2} \geqslant 0$. □

Lema 8. *Para cada* x *en* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$|x - \operatorname{sen}(x)| \leqslant \frac{|x|^3}{6}. \tag{3}$$

Demostración. Para x en $[0, \pi/2]$ aplicamos el Lema 7:

$$|x - \operatorname{sen}(x)| = x - \operatorname{sen}(x) \leqslant \frac{x^3}{6} = \frac{|x|^3}{6}.$$

Luego notamos que ambos de (3) son funciones pares. □

Lema 9. *Para cada x en* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{\pi^2}{24}.$$

Demostración. Usamos lemas anteriores:

$$\left|\frac{1}{\operatorname{sen}(x)} - \frac{1}{x}\right| \leqslant \frac{|x - \operatorname{sen}(x)|}{|x|\,|\operatorname{sen}(x)|} \leqslant \frac{|x|^2}{6|\operatorname{sen}(x)|} \leqslant \frac{\pi\,|x|}{12} \leqslant \frac{\pi^2}{24}.$$ □