La propiedad inyectiva de la correspondencia entre las formas sesquilineales y cuadráticas

En este tema suponemos que V es un espacio vectorial complejo. Dada una forma sesquilineal $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$, le asociamos la forma cuadrática $q_f\colon V \to \mathbb{C}$,

$$q_f(x) \coloneqq f(x, x).$$

Objetivos. Demostrar que la correspondencia $f \mapsto q_f$ es inyectiva.

Prerrequisitos. La identidad de polarización con 4 sumandos para las formas sesquilineales.

1 Proposición (la identidad de polarización con 4 sumandos para las formas sesquilineales, repaso)**.** *Si $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ es una forma sesquilineal sobre V, entonces para cada a, b en V,*

$$f(a, b) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \; q_f(a + \mathrm{i}^k\, b). \tag{1}$$

2 Lema. *Sea $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal tal que su forma cuadrática asociada es nula:*

$$\forall a \in V \qquad f(a, a) = 0. \tag{2}$$

Entonces, f es la función nula:

$$\forall x, y \in V \qquad f(x, y) = 0.$$

Primera demostración. Usamos la identidad de polarización: (1):

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \; q_f(x + \mathrm{i}^k\, y) = 0. \qquad \square$$

Segunda demostración. Para cada x, y en V, transformamos la expresión $f(x + y, x + y)$ usando la propiedad aditivia respecto a cada uno de los argumentos:

$$f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(y, x) + f(y, y).$$

Usamos la hipótesis (2):

$$f(x, y) + f(y, x) = 0. \tag{3}$$

Sustituimos $\mathrm{i}\, y$ en vez de y, aplicamos la propiedad homogénea respecto al primer argumento y la propiedad homogénea conjugada respecto al segundo argumento:

$$0 = f(x, \mathrm{i}\, y) + f(\mathrm{i}\, y, x) = -\mathrm{i}\, f(x, y) + \mathrm{i}\, f(y, x).$$

Multiplicamos ambos lados por i:

$$f(x, y) - f(y, x) = 0. \tag{4}$$

Sumamos (3) con (4):

$$2f(x, y) = 0.$$ □

3 Proposición (la correspondencia entre las formas sesquilineales y las formas cuadráticas es inyectiva)**.** *Sean $f\colon V^2 \to \mathbb{C}$ y $g\colon V^2 \to \mathbb{C}$ formas sesquilineales tales que $q_f = q_g$, esto es,*

$$\forall x \in V \qquad f(x, x) = g(x, x).$$

Entonces $f = g$, esto es,

$$\forall x, y \in V \qquad f(x, y) = g(x, y).$$

Primera demostración. Se sigue de la identidad (1). En efecto, si x, y en V, entonces

$$f(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_f(x + \mathrm{i}^k\, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, q_g(x + \mathrm{i}^k\, y) = g(x, y).$$

Hemos aplicado la identidad (1) para f, luego la igualdad $q_f(a) = q_g(a)$ con $a = x + \mathrm{i}^k\, y$, y la identidad (1) para g en lugar de f. □

Segunda demostración. Aplicamos el Lema 2 a la forma sesquilineal $f - g$ y concluimos que $(f - g)(x, y) = 0$ para cada x, y en V. □

4 Observación. En vez de la identidad de polarización con 4 sumandos, se puede usar la identidad de polarización más general con m sumandos, donde $m \geq 3$.

5 Observación. En el caso de espacios vectoriales reales, la correspondencia entre las formas bilineales y las formas cuadráticas, en general, no es inyectiva. Por ejemplo, en el espacio $V = \mathbb{R}^2$ consideremos la forma bilineal asociada a la matriz de rotación en ángulo $\pi/2$:

$$f(x, y) \coloneqq \begin{bmatrix} x_1, & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = -x_1 y_2 + x_2 y_1.$$

Es fácil ver que $f(x, x) = 0$ para cada x en $\mathbb{R}^2$, pero la función f no es nula.