La correspondencia entre los operadores lineales acotados y formas sesquilineales acotadas

Objetivos. Demostrar que es biyectiva e isométrica la correspondencia entre los operadores lineales acotados y las formas sesquilineales acotadas en un espacio de Hilbert.

En estos apuntes denotamos por $\mathcal{S}(H)$ el conjunto de todas las formas sesquilineales acotadas $H^2 \to \mathbb{C}$.

Repaso: acotación de las normas de operadores lineales y de formas sesquilineales

1 Ejercicio. Sea $T\colon H \to H$ un operador lineal y sea $\gamma \geq 0$. Supongamos que

$$\forall u \in H \qquad \|Tu\| \leq \gamma \|u\|.$$

Muestre que $T \in \mathcal{B}(H)$ y $\|T\| \leq \gamma$.

2 Ejercicio. Sea $f\colon H^2 \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineal y sea $\eta \geq 0$. Supongamos que

$$\forall u, v \in H \qquad |f(u, v)| \leq \eta \, \|u\| \, \|v\|.$$

Muestre que $f \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f\| \leq \eta$.

La forma sesquilineal acotada inducida por un operador lineal acotado

3 Proposición. *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$. Definimos $f_A\colon H^2 \to \mathbb{C}$ mediante la siguiente regla:*

$$f_A(u, v) \coloneqq \langle Au, v \rangle.$$

Entonces $f_A \in \mathcal{S}(H)$ y

$$\|f_A\| = \|A\|.$$

Demostración. 1. Usando la propiedad lineal A y la propiedad sesquilineal de $\langle \cdot, \cdot \rangle$, es fácil demostrar que f_A es sesquilineal.

2. Por la desigualdad de Schwarz,

$$|f_A(u,v)| = |\langle Au, v\rangle| \le \|Au\|\,\|v\| \le \|A\|\,\|u\|\,\|v\|.$$

De aquí se sigue que $f_A \in \mathcal{S}(H)$ y $\|f_A\| \le \|A\|$.

3. Para cada u en H, entonces

$$\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle = |\langle Au, Au\rangle| = |f_A(u, Au)| \le \|f_A\|\,\|u\|\,\|Au\|.$$

Si $Au \ne 0_H$, entonces dividimos entre $\|Au\|$ y obtenemos

$$\|Au\| \le \|f_A\|\,\|u\|.$$

Esta desigualdad también se cumple, si $Au = 0_H$. Concluimos que $\|A\| \le \|f_A\|$. $\square$

4 Corolario. *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que $f_A = 0_{\mathcal{S}(H)}$, es decir, f_A es la función cero. Entonces $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$.*

5 Ejercicio. Demostrar el Corolario 4 de manera más directa, sin usar la Proposición 3.

6 Ejercicio. Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $f_S = f_T$. Demostrar que $S = T$.

La forma cuadrática asociada al operador lineal acotado

7 Definición. Dado $A \in \mathcal{B}(H)$, definimos $q_A\colon H \to \mathbb{C}$,

$$q_A(v) \coloneqq f_A(v,v) \qquad (v \in H),$$

esto es,

$$q_A(v) = \langle Av, v\rangle \qquad (v \in H).$$

Recordemos que para cada forma sesquilineal $g\colon H^2 \to \mathbb{C}$ se cumple la *identidad de polarización*:

$$g(x,y) = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k\, g(x + \mathrm{i}^k\, y, x + \mathrm{i}^k\, y). \tag{1}$$

8 Proposición. *Sea $A \in \mathcal{B}(H)$ tal que*

$$\forall u \in A \qquad q_A(u) = 0.$$

Entonces $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$.

Demostración. Para cada x, y en H, aplicamos la identidad de polarización (1) a la forma sesquilineal f_A:

$$f_A(x, y) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{3} \mathrm{i}^k \, q_A(x + \mathrm{i}^k \, y).$$

Por la suposición, cada sumando en el lado derecho es 0. Concluimos que $f_A = 0_{\mathcal{S}(H)}$. Luego, por el Corolario 4, $A = 0_{\mathcal{B}(H)}$. $\square$

9 Ejercicio. Sean $S, T \in \mathcal{B}(H)$ tales que $q_S = q_T$. Demostrar que $S = T$.

10 Ejemplo (la forma sesquilineal asociada a una matriz)**.** Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Dados $x, y \in \mathbb{C}^n$, expresar

$$\langle Ax, y \rangle$$

en términos de las componentes de A, x, y.

11 Ejemplo (la forma sesquilineal asociada al operador de multiplicación)**.** Sea $(X, \mathcal{F}, \mu)$ un espacio de medida σ-finita y sea $a \in L^\infty(X, \mu)$. Denotamos por M_a el operador de multiplicación por a que actúa en $L^2(X, \mu)$ mediante la regla

$$(M_a f)(x) \coloneqq a(x) f(x).$$

Mostrar que

$$\langle M_a f, g \rangle = \int_X a \, f \, \overline{g} \, \mathrm{d}\mu.$$

El operador lineal acotado asociado a la forma sesquilineal acotada

12 Ejercicio. Recordar el teorema de Fréchet–Riesz sobre la representación de los funcionales lineales acotados en el espacio de Hilbert.

13 Ejercicio. Recordar una demostración del siguiente hecho. Si $u, v \in H$ y

$$\forall w \in H \qquad \langle u, w \rangle = \langle v, w \rangle,$$

entonces $u = v$.

14 Teorema (el teorema de Fréchet–Riesz para las formas sesquilineales acotadas)**.** *Sea* $g \in \mathcal{S}(H)$*. Entonces existe un único* A *en* $\mathcal{B}(H)$ *tal que* $f_A = g$*, esto es,*

$$\forall u, v \in H \qquad g(u, v) = \langle Au, v \rangle. \tag{2}$$

Demostración. La unicidad ya fue mostrada antes (Ejercicio 6). Demostremos la existencia.

1. Construcción de A. Para cada u en H, consideremos la función $h_u \colon H \to \mathbb{C}$,

$$h_u(v) := \overline{g(u, v)}.$$

Como g es lineal conjugada respecto al segundo argumento, la función h_u es lineal. Además,

$$|h_u(v)| = |g(u, v)| \le \|g\| \, \|u\| \, \|v\| = (\|g\| \, \|u\|) \, \|v\|.$$

Hemos mostrado que $h_u \in H^*$. Por el teorema de Fréchet–Riesz, existe un único vector w en H tal que

$$\forall v \in H \qquad h_u(v) = \langle v, w \rangle.$$

Este vector w depende de la función h_u y por lo tanto depende del vector u. Denotemos este vector w por $A(u)$. Hemos definido una función $A \colon H \to H$ con la siguiente propiedad:

$$\overline{g(u, v)} = h_u(v) = \langle v, A(u) \rangle.$$

Por lo tanto,

$$\langle A(u), v \rangle = g(u, v).$$

Hemos demostrado que la función A tiene propiedad (2).

2. Linealidad de A. Mostremos que la función A es homogénea. Si $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces

$$\langle A(\lambda u), v \rangle = g(\lambda u, v) = \lambda g(u, v) = \lambda \langle A(u), v \rangle = \langle \lambda A(u), v \rangle.$$

Como v es arbitrario, concluimos que $A(\lambda u) = \lambda A(u)$. La propiedad aditiva de A se demuestra de manera similar.

3. Acotación de A. Para cada u, v en H tenemos

$$\|A(u)\|^2 = \langle A(u), A(u) \rangle = |\langle A(u), A(u) \rangle| = |g(u, A(u))| \le \|g\| \, \|u\| \, \|A(u)\|.$$

Separando los casos $A(u) = 0_H$ y $A(u) \ne 0_H$, vemos que en ambos casos $\|A(u)\| \le \|g\| \, \|u\|$. Hemos mostrado que $A \in \mathcal{B}(H)$. □

15 Ejercicio. Escribir una demostración más concisa del Teorema 14, usando la siguiente notación. Denotamos por $\Phi\colon H \to H^*$ la correspondencia de Fréchet–Riesz:

$$\Phi(u)(v) \coloneqq \langle v, u\rangle.$$

Sabemos que Φ es una función lineal conjugada e isométrica. Fijamos $g \in \mathcal{S}(H)$. Definimos $Z\colon H \to H^*$,

$$Z(u)(v) \coloneqq \overline{g(u,v)}.$$

Se recomienda demostrar que Z es una función lineal conjugada, con

$$\sup_{\substack{u\in H\\ u\neq 0_H}} \frac{\|Z(u)\|}{\|u\|} \le \|g\|.$$

Definir A en términos de Z y Φ^{-1}.

16 Corolario. *Definimos* $\Omega\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{S}(H)$ *mediante la regla* $\Omega(A) \coloneqq f_A$*, esto es,*

$$\Omega(A)(u,v) \coloneqq \langle Au, v\rangle.$$

Entonces Ω *es un isomorfismo isométrico de espacios normados.*