Tareas del tema "Convolución"

1. Media y varianza de la distribución normal. Sea $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Usando cambios de variables, integración por partes y el valor de la integral de Poisson, calcular las siguientes integrales:

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx, \qquad \int_{\mathbb{R}} x f(x)\,dx \qquad \text{y} \qquad \int_{\mathbb{R}} x^2 f(x)\,dx.$$

Explicar que significan estas integrales para la variable aleatoria ξ con densidad f.

2. Convolución de dos distribuciones normales. Sea $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$. Usando un cambio de variables y el valor de la integral de Poisson, calcular $f * f$.

3. Sucesiones de Dirac y convergencia uniforme. Sea $\{\rho_\nu\}$ una sucesión de Dirac. Sea $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ una función continua en un abierto Ω de $\mathbb{R}^n$. Si K es un compacto contenido en Ω, la sucesión $\{\rho_\nu * f\}_{\nu=1}^\infty$ converge a f uniformemente en K.

4. Funciones suaves de soporte compacto forman un subconjunto denso de $L^p(\mathbb{R}^n)$. Sean $1 \le p < \infty$, Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y $C_c^\infty(\Omega)$ el espacio vectorial de las funciones $\Omega \to \mathbb{C}$ de clase C^∞, de soporte compacto contenido en Ω. Entonces $C_c^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$.

5. Núcleo de Landau. Para $\nu \in \mathbb{N}$ definamos la función $\rho_\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante la fórmula:

$$\rho_\nu(t) := \begin{cases} \frac{1}{c_\nu}(1-t^2)^\nu, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \ge 1, \end{cases}$$

donde $c_\nu = \int\limits_{-1}^{1} (1-t^2)^\nu\,dt$. Demostrar que $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac.

6. Demostración del teorema de aproximación de Weierstrass usando el núcleo de Landau. Sean $[a,b]$ un intervalo compacto de $\mathbb{R}$, $C[a,b]$ el espacio vectorial de las funciones continuas $[a,b] \to \mathbb{C}$ provisto de la norma uniforme, $\mathcal{P}[a,b]$ el subespacio de $C[a,b]$ contituído por las funciones polinomiales $[a,b] \to \mathbb{C}$. Entonces $\mathcal{P}[a,b]$ es denso en $C[a,b]$.

La demostración consiste en los siguientes pasos:

a) Mostrar que basta probar el teorema en el caso $[a,b] = [0,1]$.

b) Mostrar que basta probar que $\mathcal{P}[a,b]$ es denso en $C_0[0,1]$, donde

$$C_0[0,1] := \{f \in C[0,1] \colon f(0) = f(1) = 0\}.$$

c) Sea $f \in C_0[0,1]$. Mostrar que $f * \rho_\nu$ es una función polinomial, donde ρ_ν es un núcleo de Landau.

Acabar la demostración, usando el hecho que $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ es una sucesión de Dirac.

7. Suavizantes de una función. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función localmente integrable en $\mathbb{R}$. Se pone $\forall h > 0$:

$$g_h := \frac{1}{h} 1_{[-h,0]}, \qquad J_h f := f * g_h.$$

Muestre que:

- $J_h f(x) = \dfrac{1}{h} \displaystyle\int_0^h f(x+y)\, dy;$
- $J_h f$ es continua en $\mathbb{R}$;
- si f es integrable en $\mathbb{R}$, también lo es $J_h f$ y $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} J_h f = \int_{\mathbb{R}} f.$

8. Ecuación con la convolución. Sean $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\|f\|_1 < \frac{1}{|\lambda|}$. Muestre que la ecuación

$$x = \lambda x * f + g$$

admite una solución $x \in L^1(\mathbb{R}^n)$ única a menos de una equivalencia. Pruebe que

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \cdot g * \underbrace{f * \cdots * f}_{\nu},$$

y la serie converge en $L^1(\mathbb{R}^n)$. Indicación: usar el teorema del punto fijo.

9. Núcleo de calor como una familia de Dirac. Para todo $t > 0$,

$$K_t(x) := K(t,x) := \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-x^2/4t}.$$

Demostrar que $\{K_t\}_{t>0}$ es una *familia de Dirac* en el siguiente sentido:

- $K_t(x) \geq 0$ para todos $x \in \mathbb{R}$, $t \geq 0$.
- $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} K_t(x)\, dx = 1$ para todo $t > 0$.
- Para todo $\delta > 0$ se tiene $\displaystyle\lim_{t\to 0} \int_{|x| \leq \delta} K_t(x)\, dx \to 0.$

10. Solución de la ecuación del calor. Demostrar que el núcleo de calor $K(x,t)$ satisface la siguiente *ecuación del calor*:

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial K(x,t)}{\partial t} = 0.$$

Sea f una función continua acotada en $\mathbb{R}$. Demostrar que la función

$$F(t,x) := (K_t * f)(x)$$

satisface la ecuación del calor, i.e. $\dfrac{\partial^2 F(t,x)}{\partial x^2} = \dfrac{\partial F(x,t)}{\partial t}$.

11. Involución en el álgebra de convolución. Para $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, se define f^* por

$$f^*(x) := \overline{f(-x)} \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

a) Si $f, g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ son medible y $f * g$ existe, demuestre que $f^* * g^* = (f * g)^*$.

b) Si $g \in L^2(\mathbb{R}^n)$ y $(g * g^*)(0) = 0$ demuestre que $g = 0$ c.t.p.

c) Una sucesión de Dirac $\{\rho_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ se llama *excelente* si $\forall \nu \in \mathbb{N}$, $\rho_\nu \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Dé un ejemplo de una sucesión de Dirac excelente.

d) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ tal que $f * f^* = 0$ c.t.p. Demuestre que $f = 0$ c.t.p.

   Indicación: considere $(f*\rho_\nu)*(f*\rho_\nu)^*$, donde $\{\rho_\nu\}$ es una sucesión de Dirac excelente, y aplique b).

e) Sea $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Se supone $f * f = 0$ c.t.p. Demuestre que $f = 0$ c.t.p.

   Indicación: considere $g * g^*$, donde $g := f * f^*$.